複素解析とその応用

Complex Analysis and its Applications

新井朝雄　著

共立出版

ギリシャ文字一覧表

A, α	アルファ	N, ν	ニュー
B, β	ベータ	Ξ, ξ	グザイ
Γ, γ	ガンマ	O, o	オミクロン
Δ, δ	デルタ	Π, π, ϖ	パイ
$\mathrm{E}, \epsilon, \varepsilon$	イプシロン	$\mathrm{P}, \rho, \varrho$	ロー
Z, ζ	ゼータ	$\Sigma, \sigma, \varsigma$	シグマ
H, η	イータ	T, τ	タウ
$\Theta, \theta, \vartheta$	シータ(テータ)	Υ, υ	ウプシロン
I, ι	イオタ	Φ, ϕ, φ	ファイ
K, κ	カッパ	X, χ	カイ
Λ, λ	ラムダ	Ψ, ψ	プサイ
M, μ	ミュー	Ω, ω	オメガ

筆記体文字（スクリプト文字）一覧表

A	$\mathcal{A}$	N	$\mathcal{N}$
B	$\mathcal{B}$	O	$\mathcal{O}$
C	$\mathcal{C}$	P	$\mathcal{P}$
D	$\mathcal{D}$	Q	$\mathcal{Q}$
E	$\mathcal{E}$	R	$\mathcal{R}$
F	$\mathcal{F}$	S	$\mathcal{S}$
G	$\mathcal{G}$	T	$\mathcal{T}$
H	$\mathcal{H}$	U	$\mathcal{U}$
I	$\mathcal{I}$	V	$\mathcal{V}$
J	$\mathcal{J}$	W	$\mathcal{W}$
K	$\mathcal{K}$	X	$\mathcal{X}$
L	$\mathcal{L}$	Y	$\mathcal{Y}$
M	$\mathcal{M}$	Z	$\mathcal{Z}$

まえがき

水の中たづねてみれば波はなし
　　　されども波は水よりぞ立つ

—大燈国師[1]

変数が複素数で，とりうる値も複素数である関数を，複素関数という．複素関数に関する学問は，実関数，すなわち，変数が実数で，とりうる値も実数である関数を扱う通常の微分積分学の“上位”に連なる数学分野のひとつとして自然な位置を占めるものであり，総称的に複素解析学—あるいは単に複素解析—または複素関数論とよばれる．本書は，この複素解析学の基礎的な部分—大学にあっては，数学科や数理系学科の 2 年次から 4 年次くらいまでに修得すべき内容—を，その応用的側面にも留意しつつ，組織的に論述したものである．

本書を読むためには，集合と写像に関する初等的な知識および微分積分学の標準的な内容（2 変数関数の理論も含む）を修得していることが必要である[2]．本書は，いわゆる教科書としてではなく，第一義的には，独習書たらんとことを意図して書かれている．この観点から，諸々の概念の定義の背景にある考え方や着想等にも可能な限り触れ，命題や定理の証明もできるだけ詳しく書くように努めた．内容に比してページ数が多いのはこのためである．したがって，叙述の“密度”は薄い．だが，そのぶん読みやすくなっていることを期するものである．

本書の主な読者層としては，大学の理工系の学生，大学院生および数学や数理物理学の愛好家を念頭においている．

複素解析の中心的な対象となるのは，正則関数とよばれる関数の範疇である（詳しくは，本文の第 3 章以降を参照）．この関数の織り成す世界は，実関数の世界に

---

[1] 1282–1337．京都の名刹大徳寺の開山．禅の巨匠のひとり．僧号は宗峰妙超．

[2] 写像については，本書の付録の程度の内容を理解していればよいであろう．

はない，驚くべき真理と美と調和に満ちている．そして，その理法は，現象的次元においては，たとえば，流体（気体，液体）の流れや電磁場のパターンを決定する原理として働く．だが，複素関数の関わる世界は，そうした表層的な現象領域にとどまらず，物質的現象界の根底をなす量子的存在次元の理法—量子力学の数学的諸原理— とも密接に関連していることが見出される[3)]．このように，複素数が関わる世界は深遠であり，しかも独特の美しさを有し，より高次の（形而上学的）リアリティへと通じている．

本書の構成について，若干の解説をしておこう．本書は，まず，複素数の厳密な定義から始まる（第１章）．これは，複素数に対する真の認識を目指す人にとっては，一度はどうしても通らなければならない“通過点”である．複素数や複素関数に関わる諸々の概念や性質を明晰に捉えるためには，複素数の集合＝複素数体における位相的諸概念の厳密な理解が不可欠である．第２章は，この目的のための章である．第３章から正則関数の理論に入る．ここから，章が進むにつれて，徐々に高みへと昇っていき，第７章において，本書の頂点へと達する．基礎理論の部はこれで終了である．残りの２章，すなわち，第８章と第９章は基礎理論の応用に充てられる．複素関数論の応用範囲は他の数学分野，物理学，工学など非常に多岐にわたる．ここでは，特殊関数論と物理学への応用のほんの一部だけをとりあげた．第８章は，ガンマ関数とリーマンのゼータ関数とよばれる特殊関数の基本的性質を論じたものである．これら２つの関数は，複素解析学以外の数学分野や数理物理学においてもいろいろな場面に登場する．リーマンのゼータ関数は素数の理論や量子場の理論とも密接な関係にある[4)]．最終章（第９章）は，複素解析的な理念が，古典力学，流体力学，電磁気学，量子力学においてどのように現れるか，その一端を見ていただくための章である．だが，この章については，紙幅の関係で，記述が表面的・皮相的なものになってしまったきらいがあることをお断りしておかねばならない（本格的に書き出したら，この主題だけで優に一冊の本になってしまうであろう）．ともあれ，本書が，読者にとって，数理の世界の美しさをより深く観照し，数学や数理物理学の学習あるいは研究をさらに推進

---

3) 量子力学の数理については，たとえば，拙著『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版，1997) を参照．

4) 量子場の数学的理論については，拙著『フォック空間と量子場(上・下)』(日本評論社，2000) を参照．

する機縁となるならば，筆者にとって，これにまさる喜びはない[5]．

北海道大学理学部数学科４年生の松澤泰道君は，本書の原稿を通読し，誤植の訂正や不十分な個所の指摘を含め，貴重な意見を寄せてくれた．ここに記して感謝したい．また，本書の出版に際して，いろいろとお世話になった，共立出版編集部の方々にも厚く御礼を申し上げる．

2006年晩秋　札幌の寓居にて

新 井 朝 雄

[5] 現代数理物理学への入門書として，保江邦夫『数理物理学方法序説 1〜8，別巻』(日本評論社，2000〜2002) と拙著『物理現象の数学的諸原理』(共立出版，2003) をあげておこう．

記号表

基本的記号

$\mathbb{N}$	自然数全体の集合
$\mathbb{Z}$	整数全体の集合
$\mathbb{Q}$	有理数の全体の集合
$\mathbb{R}$	実数全体の集合
$\mathbb{C}$	複素数全体の集合
sup	下限
inf	上限
max	最大値
min	最小値
$\mathsf{R}(f)$	写像 f の像（値域）
$a < \infty$	a は有限

集合と論理に関わる記号

$a := b$	a を b によって定義する
$x \in X$ または $X \ni x$	x は集合 X の元（要素）である
$x \notin X$	x は集合 X の元でない（X に属さない）
$A \subset B$	集合 A は集合 B の部分集合である
$A \setminus B$（または $A - B$）	A と B の差 $(A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\})$
A^c $(A \subset X)$	集合 X における A の補集合 $(A^c := X \setminus A)$
「$P(x), \forall x \in X$」または 「$P(x), x \in X$」	すべての $x \in X$ に対して，$P(x)$ が成立 （X は集合，$P(x)$ は x に関する命題または事柄）

目　次

1

複素数と複素関数

もし，何かを純粋に見ようとするなら，肉体から離れて，魂そのものによって，物そのものを見なければならないということは，われわれには確かに明白な事実なのだ．

── プラトン『パイドン』より[1)]

1.1 背景 ── 数の体系

はじめに，この章の基本的主題のひとつである複素数に関わる数学的背景を手短に述べておく．周知のように，実数全体の集合 ── 実数体といい，$\mathbb{R}$ という記号で表す ── は，ある種の階層構造をなしている．すなわち，$\mathbb{R}$ はその部分集合として，自然数の集合 $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \cdots\}$，整数の集合 $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$，有理数の集合 $\mathbb{Q} := \{m/n \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$，そして無理数（有理数でない実数）の集合を含む ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$)[2)]．自然数の集合 $\mathbb{N}$ では，足し算と掛け算はできるが，引き算と割り算は一般にはできない（$n, m \in \mathbb{N}$ であっても $n - m, m/n$ が $\mathbb{N}$ に属するとは限らない）．整数の集合 $\mathbb{Z}$ においては，足し算と引き算と掛け算はできるが，割り算は一般にはできない（$n, m \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ でも m/n が $\mathbb{Z}$ に属するとは限らない）．有理数の集合 $\mathbb{Q}$ にいたって初めて，四則演算（加減乗除），すなわち，足し算（和，加法），引き算（差，減法），掛け算（積，乗法），割り算（除法）という 4 つの演算が可能となり，この性質は，$\mathbb{R}$ 全体にも受け継がれる．自然数から整数へ，整数から有理数へという数概念の拡大には，可能な演算の種類の増大が伴っている．有理数から実数への拡大においては，演

[1)] 田中美知太郎・池田美恵 訳（新潮文庫 黄 29A，新潮社）．プラトン (前 427–347，ギリシア) は，古今東西を通じて，最も偉大な哲学者のひとり．プラトン哲学の根本理念については，拙著『物理現象の数学的諸原理』(共立出版，2003) の序章を参照．

[2)] 「$A := B$」は，A を B によって定義することを表す記法である．

算の種類は増えないが，完備性という新しい性質が付け加わる[3)].

四則演算が自由にできるという構造は，$\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ が有する基本的構造の 1 つである．数の拡大という観点からは，次の問いが自然に浮かび上がってくる．すなわち，$\mathbb{R}$ をその真部分集合として含み，かつ $\mathbb{R}$ における四則演算と同様の演算構造をもつ集合は存在するであろうか．この問いに対する答えは，結論から述べるならば，肯定的であり，それは，これから定義する複素数とよばれる対象の存在によって示されるのである[4)].

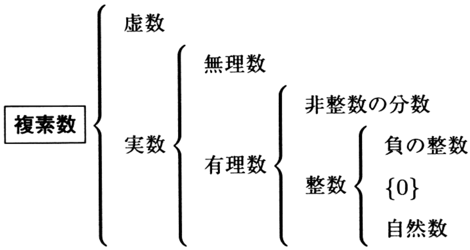


図 1.1　数の体系（複素数まで）

1.2　複素数の定義

1.2.1　動機づけ

高等学校の教程では，複素数は単に記号的・形式的なものとして導入される．すなわち，複素数とは，a, b を任意の実数として，虚数単位とよばれる特別な記号 i を用いて $a + bi$ という形で表される対象であって，次の 3 つの性質をみたすものである：(i) 四則演算（加減乗除）が自由にできる．(ii) 四則演算の計算にあたっては，i^2 が出てきたら，それを -1 で置き換えてよい（言い換えれば，$i^2 = -1$）.

---

3) $\mathbb{R}$ の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，任意の正の実数 $\varepsilon > 0$ に対して，番号 n_0 があって，$n, m \geq n_0$ ならば $|x_n - x_m| < \varepsilon$ が成り立つとき，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathbb{R}$ における**コーシー列**または**基本列**という．$\mathbb{R}$ の任意のコーシー列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束列である．すなわち，実数 a があって，$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ が成り立つ．この性質を $\mathbb{R}$ の**完備性** (completeness) とよぶ．また，任意の実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して，有理数の列 $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($q_n \in \mathbb{Q}, n = 1, 2, \cdots$) があって，$\lim_{n\to\infty} q_n = x$ が成り立つ．これを $\mathbb{R}$ における $\mathbb{Q}$ の**稠密性**（ちゅうみつせい）という．これも重要な性質である．

4) 複素数という名称 —— 英語では，complex number —— は「複-素数」と読んではいけない（これでは，2 つの素数という意味になりかねない）．以下で明らかになるように，それは，「複素-数」，すなわち，2 つの“素（もと）”からなる数の意である．

(iii) $a+0i=a,\ a\in\mathbb{R}$（これは複素数が実数を含むことを示す）．しかし，よく考えてみるならば，これは，複素数の定義にはなっていないことがわかる．たとえば，$i^2=-1$ をみたす対象“i”とはいかなるものか，$a+bi$ における“$+$”の意味は何か，そもそもそのような対象は存在するのか，といった疑問がただちに出てくる．こうして，真摯に数理を探究していく立場にとっては，複素数とは何なのか，という問いが，改めて，根本的な問題として浮上してくるのである．この節は，この問いに答えるためのものである．

1.2.2 複素数体の構成

実数体 $\mathbb{R}$ の直積集合 $\mathbb{R}^2=\{z=(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ の任意の 2 つの元 $\alpha=(a,b),\beta=(c,d)$ に対して，和 $\alpha+\beta$ と積 $\alpha\beta$（$\alpha\cdot\beta$ とも記す），および実数 $t\in\mathbb{R}$ による掛け算（実数倍）$t\alpha\ (=\alpha t)$ を $\mathbb{R}^2$ の元として次のように定める：

$$\alpha+\beta:=(a+c,b+d),\quad \alpha\beta:=(ac-bd,ad+bc),\quad t\alpha:=(ta,tb). \tag{1.1}$$

これらの演算が定義された $\mathbb{R}^2$ の元を**複素数**とよぶ．複素数の全体を $\mathbb{C}$ で表し，これを**複素数体**とよぶ．なお，$\mathbb{R}^2$ の元の相等の定義により，$\alpha=\beta$ であることは $a=c$ かつ $b=d$ ということである．

複素数体における和の演算を足し算，積の演算を（実数倍も含めて）掛け算とよぶ．これらの演算について，以下の諸法則が成り立つことを確かめるのは容易である（$z_1,z_2,z_3,z,w\in\mathbb{C}$, $a,b\in\mathbb{R}$ は任意）：

(C.1) （和の交換則） $z_1+z_2=z_2+z_1$.

(C.2) （和の結合則） $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.

(C.3) （積の交換則） $z_1z_2=z_2z_1$.

(C.4) （積の結合則） $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$.

(C.5) （積の分配則） $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$.

(C.6) (i) $(ab)z=a(bz)$； (ii) $1z=z$； (iii) $(az)w=a(zw)=z(aw)$.

(C.7) （実数倍の分配則） $(a+b)z=az+bz,\ a(z+w)=az+aw$.

これは，つまり，$\mathbb{C}$ における足し算と掛け算も，$\mathbb{R}$ における足し算と掛け算の法則と同じ法則にしたがうことを語る．

複数の複素数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ の和 $z_1+\cdots+z_n$（$\sum_{j=1}^n z_j$ とも書く）は，帰納的に

$$z_1 + \cdots + z_n = (z_1 + \cdots + z_{n-1}) + z_n \tag{1.2}$$

によって定義される．和の結合則と交換則により，$z_1 + \cdots + z_n$ は $z_1, \cdots, z_n$ を加える順序によらずに一意的に定まることがわかる．

積 $z_1 \cdots z_n$（$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdots z_{n-1} \cdot z_n$ のようにも記す）も帰納的に

$$z_1 \cdots z_n := (z_1 \cdots z_{n-1}) z_n \tag{1.3}$$

によって定義される．これも，積の結合則と交換則により，積をとる順序にはよらないことがわかる．特に，ひとつの複素数 z を n 回かけて得られる複素数

$$z^n := \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n\text{ 個}} \tag{1.4}$$

を z の n 乗とよぶ．この場合，n をその**冪**（べき）とよぶ．

実数体 $\mathbb{R}$ には 0 という特別な元が存在した．複素数体 $\mathbb{C}$ においてこれに相当する元は

$$0_{\mathbb{C}} := (0, 0) \tag{1.5}$$

である．実際，任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$z + 0_{\mathbb{C}} = z, \quad 0_{\mathbb{C}} z = 0_{\mathbb{C}}, \quad 0z = 0_{\mathbb{C}} \tag{1.6}$$

が成り立つことを確かめるのは容易である．この特別な要素 $0_{\mathbb{C}}$ を $\mathbb{C}$ の**零元**とよぶ．

各 $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ に対して，$-z \in \mathbb{C}$ を

$$-z := (-1)z = (-x, -y) \tag{1.7}$$

によって，定義すれば

$$z + (-z) = 0_{\mathbb{C}} \tag{1.8}$$

が成り立つ．そこで，$-z$ を**和に関する z の逆元**とよぶ．

1.2.3　減法（引き算）

和に関する逆元を用いることにより，任意の 2 つの複素数 z_1, z_2 に対して，そ

れらの**差** $z_1 - z_2$ を

$$z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2) = z_1 + (-1)z_2 \tag{1.9}$$

によって定義できる．こうして，$\mathbb{C}$ において減法（引き算）が導入される．具体的に見るならば，$z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$ に対して

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2). \tag{1.10}$$

1.2.4 複素数の表示と虚数単位

複素数体の構造をより詳しく見るために，和と実数倍の定義により，任意の $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ は，$z = x(1,0) + y(0,1)$ と書けることに注目する．そこで

$$\mathbf{1} := (1, 0), \quad i := (0, 1) \tag{1.11}$$

とすれば

$$z = x\mathbf{1} + yi \tag{1.12}$$

という表示が得られる．

積の定義から

$$\mathbf{1}z = z\mathbf{1} = z, \qquad i^2 = -\mathbf{1} \tag{1.13}$$

が成り立つ．第 1 式は，$\mathbf{1}$ をかける演算が何も変えないことを意味する．そこで，以後，単に

$$z = x + yi = x + iy \tag{1.14}$$

と記す．ところで，$-\mathbf{1} = (-1)\mathbf{1}$ であったから，この記法にしたがえば，(1.13) は

$$i^2 = -1 \tag{1.15}$$

である．また，$0_{\mathbb{C}} = 0 \cdot \mathbf{1}$ であるから，$0_{\mathbb{C}}$ も 0 と記されることになる．

$y = 0$ ならば，$z = x$ であるので，実数は複素数の特殊な場合とみなせる[5]．こうして，複素数体は実数体の拡大であることがわかる．

---

[5] これは，より厳密には，次の意味でとらえなければならない．写像 $\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を $\iota(x) := x\mathbf{1}$, $x \in \mathbb{R}$ によって定義する（写像の一般概念については，付録 A を参照）．このとき，ι が単射であって，しかも演算を保存すること ($\iota(x+y) = \iota(x) + \iota(y)$, $\iota(xy) = \iota(x)\iota(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$) は容易にわかる．したがって，代数的構造そのものに関しては，$\mathbb{R}$ と ι の像 $\iota(\mathbb{R}) = \{x\mathbf{1} \mid x \in \mathbb{R}\}$ は同じ構造をもつ．この意味において，$\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ の部分集合 $\{x\mathbf{1} \mid x \in \mathbb{R}\}$ を同一視するのである．

$y \neq 0$ をみたす複素数 z, すなわち, 実数でない複素数を**虚数** (imaginary number) とよぶ[6]. 特に, i の零でない実数倍で表される複素数, すなわち, $z = yi\,(y \in \mathbb{R}, y \neq 0)$ という形の虚数を**純虚数**という. この意味で, i を**虚数単位**とよぶ.

表示 (1.14) を用いると和, 積, 実数倍の演算は次のように表される (x_j, y_j, $j = 1, 2$, $a \in \mathbb{R}$) ：

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i, \tag{1.16}$$

$$(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i, \tag{1.17}$$

$$a(x + yi) = ax + ayi. \tag{1.18}$$

1.2.5　除法（割り算）

複素数の相等の定義から, $z = x + yi \neq 0$ $(x, y \in \mathbb{R})$ ならば, $x^2 + y^2 > 0$. したがって

$$z^{-1} := \frac{1}{x^2 + y^2}(x - yi) \in \mathbb{C} \tag{1.19}$$

という複素数が定義できる. (1.17) を使って計算すると

$$zz^{-1} = z^{-1}z = 1 \tag{1.20}$$

が示される. そこで, z^{-1} を**積に関する z の逆元**とよぶ. 便宜上

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = 1/z$$

のようにも記す.

$i = 1i$（$x = 0, y = 1$ の場合）であるから, $i \neq 0$ であり

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = -i. \tag{1.21}$$

これは, 以下, 暗黙のうちに, 頻繁に使われる事実である.

---

[6] 漢字の「虚」には, むなしい, 中身のない, うつろな, といった意味があるが, この意味では, 虚数という命名は適切なものとは言えない（対応する英語の名称「imaginary number」についても同様). なぜなら, 虚数は, 決して, そのような数ではないし, それどころか, 測りしれない豊饒さと深さを秘めているからである. この側面については, 本書の内容全体自体がおのずと語ってくれることを願うものである. 名称に囚われないように注意されたい. 哲学的に言えば, 虚数は, 実数よりも高次の形而上的リアリティ (reality) に関わる. 数学的理念界の位階的構造に即して言うならば, 虚数は, 実数よりも根源的な存在である. このことは, たとえば, 物質の究極的構成要素である原子や素粒子の本性から発する量子現象の理法を記述する量子力学において, 虚数が本質的な役割を担うことからも示唆されることである（拙著『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版, 1997) の第 6 章, 拙著『物理現象の数学的諸原理』(共立出版, 2003) の第 10 章を参照).

零でない複素数 $z \neq 0$ に対して，z の**マイナス n 乗** z^{-n} ($n \in \mathbb{N}$) を

$$z^{-n} := (z^{-1})^n \tag{1.22}$$

によって定義する．

上述の事実により，任意の $w \in \mathbb{C}$ と $z \neq 0$ に対して

$$\frac{w}{z} := wz^{-1} = z^{-1}w \tag{1.23}$$

が定義される．この複素数を z による w の**商**という．これを，記号的に，w/z とも記す．対応 : (w,z) $(w,z \in \mathbb{C}, z \neq 0) \mapsto w/z$ を複素数に関する**除法**または**割り算**とよぶ．

1.2.6 まとめと補注

以上から，複素数体 $\mathbb{C}$ においては四則演算が定義され，これらについて，実数の場合と同様の自然な計算則が成り立つことがわかる．

この節では，具象的な対象 $\mathbb{R}^2$ を用いて，複素数体を構成したが，複素数体の概念は，実は，そのような具象的構成とは独立な普遍的な概念である[7]．これは，複素体を，ある構造をもつ集合として，公理論的に定義することによって示される．詳細は，割愛せざるをえないが，複素数体というのは，公理論的には，**可換体**とよばれる集合の範疇の特殊形態のひとつなのである[8]．この節で構成した複素数体は，複素数体の公理系をみたす具象的な集合＝複素体のモデルのひとつにすぎない．これ以外にも，複素数体のモデルは無数に存在する．だが，それらはすべて，複素数体としては（同型という概念を用いることにより）同じものとみなせるのである．

ところで，数の体系は複素数で終わりではない．複素数を包含する数体系として**超複素数系** (hypercomplex) とよばれるものが存在する．これは，一段と高次の数体系であり，いくつかの型に分類される．**4 元数**とよばれる数体系 —— これは天体力学等，その応用範囲は広い —— は，超複素数系の一例である[9]．

---

[7] この認識は，哲学的にも重要である．

[8] 拙著『現代物理数学ハンドブック』（朝倉書店，2005）の p.31 を参照．

[9] 拙著『現代物理数学ハンドブック』（朝倉書店，2005）の p.3〜p.4．なお，超複素数の一般論については，たとえば，I. L. Kantor, A. S. Solodovnikov『超複素数入門 —— 多元環へのアプローチ』（浅野　洋・笠原久弘 訳，森北出版，1999）を参照．数理物理学的な観点から書かれた文献として，保江邦夫『数理物理学方法序説 1 複素関数論』（日本評論社，2000）の第 18 章や菊池定衛門『高階複素数論』（恒星社厚生閣，1990）がある．

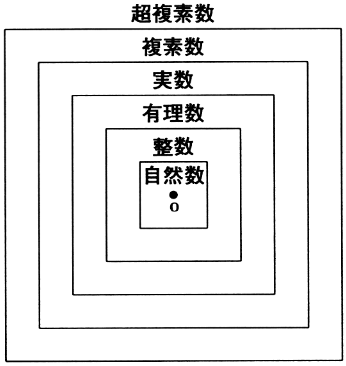


図 1.2　数の体系の象徴図

1.3　実部，虚部，共役複素数，絶対値

複素数 $z \in \mathbb{C}$ の表示 $z = x + iy = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ において，x を z の**実部** (real part)，y を z の**虚部** (imaginary part) といい，それぞれ，$x = \mathrm{Re}\, z$，$y = \mathrm{Im}\, z$ と記す．以下，$z = x + iy$ と書いたら，特に断らない限り，x, y はそれぞれ，z の実部，虚部を表すものとする．複素数 $z = x + iy$ に対して，その虚部 y の符号を変えて得られる複素数

$$z^* := x - iy \tag{1.24}$$

を z の**共役**(きょうやく)**複素数** (complex conjugate)，または単に**共役**という．z の共役 z^* を $\bar{z}$ という記号で表す書籍も多いが ($\bar{z} := x - iy$)，本書では，主に，z^* を用いる．容易にわかるように

$$i^*(=\bar{i}\,) = -i, \quad a^*(=\bar{a}) = a, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{1.25}$$

また

$$(z^*)^* = z \tag{1.26}$$

が成り立つこと ── 2 回共役をとるともとに戻るということ ── は (1.24) から明らかであろう．

任意の複素数 z の実部 x と虚部 y は，z とその共役 z^* を用いて

$$x = \frac{z + z^*}{2}, \quad y = \frac{z - z^*}{2i} \tag{1.27}$$

と表される．

【命題 1.1】 任意の $z, w \in \mathbb{C}$ に対して，次の式が成り立つ：

$$(z+w)^* = z^* + w^*, \quad (zw)^* = z^* w^*. \tag{1.28}$$

証明 $z = x+iy, w = u+iv$ $(x,y,u,v \in \mathbb{R})$ とすれば，$z+w = x+u+i(y+v)$ であるから，$(z+w)^* = x+u-i(y+v) = z^*+w^*$．また，積公式 (1.17) と共役の定義により，$(zw)^* = xu-yv-(xv+yu)i = xu-(-y)(-v)+(x(-v)+(-y)u)i = z^*w^*$． ∎

複素数 $z = x+iy$ に対して

$$|z| := \sqrt{x^2+y^2} \tag{1.29}$$

によって定義される非負の数 $|z|$ を z の**絶対値** (absolute value, modulus)，あるいは**大きさ**という．

$(-y)^2 = y^2$ であるから，z の絶対値とその共役 z^* の絶対値は相等しい：

$$|z^*| = |z|. \tag{1.30}$$

零でない任意の複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して，(1.19) により

$$z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2}. \tag{1.31}$$

したがって

$$|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}. \tag{1.32}$$

複素数に関する積公式 (1.17) を用いると

$$|z|^2 = z^* z \ (= \bar{z} z) \tag{1.33}$$

が導かれる．

(1.29) から，$|z| \geq |x|$，$|z| \geq |y|$ であるから

$$|\,\mathrm{Re}\, z| \leq |z|, \quad |\,\mathrm{Im}\, z| \leq |z|, \quad z \in \mathbb{C} \tag{1.34}$$

が成り立つ．また，$\sqrt{x^2+y^2} \le |x|+|y|$ であるから

$$|z| \le |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|. \tag{1.35}$$

複素数の絶対値の性質で上記以外のものを命題としてまとめておこう：

【命題 1.2】 (i) すべての $z, w \in \mathbb{C}$ に対して，$|zw| = |z||w|$.

(ii) (**3 角不等式**) すべての $z, w \in \mathbb{C}$ に対して

$$|z+w| \le |z| + |w|, \tag{1.36}$$

$$\big||z| - |w|\big| \le |z-w|. \tag{1.37}$$

(iii) すべての $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ に対して

$$|z_1 + \cdots + z_n| \le \sum_{j=1}^{n} |z_j|. \tag{1.38}$$

証明　(i) $z = x+iy, w = u+iv$ とおく $(x, y, u, v \in \mathbb{R})$．積公式 (1.17) によって

$$|zw| = \sqrt{(xu-yv)^2 + (xv+yu)^2} = \sqrt{(x^2+y^2)(u^2+v^2)} = |z||w|.$$

(ii) $|z+w|^2 = (z^*+w^*)(z+w)$ の右辺を展開すれば

$$|z+w|^2 = |z|^2 + z^*w + w^*z + |w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z^*w) + |w|^2 \tag{1.39}$$

が得られる[10]．(1.34) の 1 番目の不等式により，$\operatorname{Re}(z^*w) \le |z^*w|$．(i) および (1.30) によって，$|z^*w| = |z^*||w| = |z||w|$．したがって，$|z+w|^2 \le |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2$．ゆえに，(1.36) が得られる．

いま証明した不等式により，$|z| = |(z-w)+w| \le |z-w| + |w|$．したがって，$|z| - |w| \le |z-w|$．$z$ と w の役割を入れ替えて，$|w-z| = |(-1)(z-w)| = |(-1)||z-w| = |z-w|$ を用いると，$|w| - |z| \le |z-w|$ が得られる．ゆえに (1.37) が成り立つ．

(iii) n に関する帰納法による．$n=1$ のときは自明．$n=m$ のとき $(m \in \mathbb{N})$，(1.38) が成り立つとする．このとき，(1.36) を使うことにより，$|z_1 + \cdots + z_m +$

[10] これは，よく使われる基本的な式のひとつであるので，記憶しておくことを勧める．

$z_{m+1}| \le |z_1 + \cdots + z_m| + |z_{m+1}|$．帰納法の仮定により，右辺は，$(\sum_{j=1}^{m} |z_j|) + |z_{m+1}| = \sum_{j=1}^{m+1} |z_j|$ に等しい．したがって，$n = m+1$ の場合も (1.38) は成り立つ．∎

1.4　複素平面と極形式

1.4.1　複 素 平 面

複素数を幾何学的に表示することを考える．直交座標を導入した2次元ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ において，その座標が (x,y) で与えられる点に複素数 $z = x + iy$ を対応させ，これを点 z という[11]．対応：$(x,y) \mapsto z = x + iy \,(= x + yi)$ は全単射である．この対応による複素数の点集合としての平面を**複素平面** (complex plane) または**ガウス平面** (Gaussian plane) という[12]．これも同一の記号 $\mathbb{C}$ で表す．複素数0に対応する点を**原点**とよび，O または0で表す．

平面 $\mathbb{R}^2$ における x 軸（横軸）は，複素平面の部分集合としては，実数の全体を表し，y 軸（縦軸）は，原点を除いて，純虚数の全体を表す．そこで，複素平面の部分集合としての x 軸，y 軸をそれぞれ**実軸**，**虚軸**という（図1.3を参照）．いま言及した対応との関係において，複素数 z の表示 $z = x + iy$ を z の**座標表示**，または**成分表示**とよぶ．

図1.3において，z の共役複素数を表す点は，実軸に関して z を鏡映した点である．（z と z^* は，実軸に関して左右対称の位置にある．）

複素平面は，次のように，いくつかの部分に分けることができる．

(i) 実軸よりも上の部分，すなわち，虚部が正である複素数の集合 $\{z = x + iy \mid y > 0\}$ を**上半平面** (upper half-plane) という．

(ii) 実軸よりも下の部分，すなわち，虚部が負である複素数の集合 $\{z = x + iy \mid y < 0\}$ を**下半平面** (lower half-plane) という．

---

[11] Euclid（英）（前300頃）．ギリシア語読みはエウクレイデス (Eukleides)．いわゆるユークリッド幾何学の大成者．その偉大な記念碑的著作『原論』（邦訳：『ユークリッド原論』（中村幸四郎ほか訳・解説，共立出版）は，人類の精神史上，画期的な書物である．

[12] ガウス (Karl Friedrich Gauss, 1777–1855) はドイツの天才的数学者，数理物理学者，天文学者．広範囲の分野・領域にわたって，偉大な業績を残した．複素平面のことを**ガウス–アルガン平面**という場合もある（アルガンは数学者 Jean Robert Argan (1768–1822) の姓）．

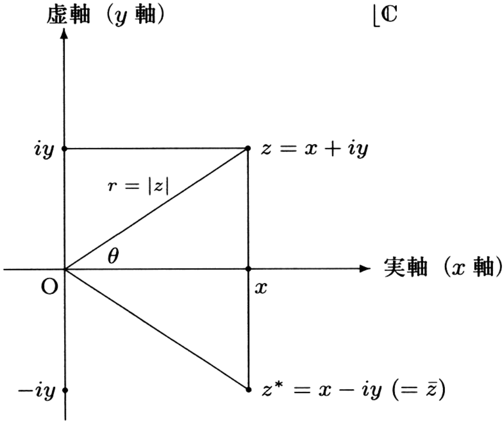


図 1.3　複素平面

(iii) 実部が正である複素数の集合 $\{z = x + iy \mid x > 0\}$ を**右半平面** (right half-plane) という．

(iv) 実部が負である複素数の集合 $\{z = x + iy \mid x < 0\}$ を**左半平面** (left half-plane) という．

$\mathbb{R}^2$ の点 $(x, y) \neq (0, 0)$ の極座標を (r, θ) $(r > 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすれば

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|, \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{1.40}$$

であるから，零でない $z = x + iy$ は

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1.41}$$

と表される[13]．これを z の**極形式** (polar form) という．この場合，θ を z の**偏角** (argument) とよび，$\theta = \arg z$ と記す．これは，幾何学的には，実軸と線分 Oz のなす角度を反時計回りに測ったものである（図 1.3）．なお，角度の単位はラジアン（弧度法）で測り，反時計回りを角度の正の向きとする．

(1.40) の第 1 式からわかるように，z の絶対値 $|z|$ は，幾何学的には，**原点と点 z との距離**を表す（図 1.3 を参照）[14]．

---

[13] $\cos\theta$ は余弦関数，$\sin\theta$ は正弦関数である．

[14] 厳密に言えば，ユークリッド幾何学の意味での距離である．以下，「幾何学的」という場合の幾何学は，特に断らない限り，ユークリッド幾何学を指す．

任意の 2 点 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$ $(x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R})$ に対して

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{1.42}$$

であるから，$|z_1 - z_2|$ は，幾何学的には，**点 z_1 と点 z_2 の間の距離**を表す．

複素数 $z \neq 0$ の偏角は一意的には決まらず，2π の整数倍の加減の任意性がある．（任意の整数 n に対して，$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta$, $\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta$ に注意.）そこで，$-\pi < \theta \leq \pi$ をみたす偏角 θ を z の**偏角の主値** (principal value of argument) とよび，記号的に $\operatorname{Arg} z$ で表す．したがって

$$-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi. \tag{1.43}$$

(1.41) は

$$z^* = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)] \tag{1.44}$$

を導く．これは，z の共役複素数の偏角は，z の偏角の符号を変えたものであることを語る．

任意の $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ に対して，(1.31) により

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{1}{r}\,[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)] \tag{1.45}$$

がわかる．これは次のことを語る：(i) $1/z$ の大きさは，z の大きさの $1/|z|^2$ になる；(ii) $1/z$ の偏角は，z の偏角の符号を変えたものである．

1.4.2 極形式の諸性質

ここで，記号をひとつ導入しておく．p を複素数とする．2 つの複素数 α, β に対して，整数 n があって，$\alpha - \beta = np$ が成り立つとき，$\alpha = \beta \pmod p$ と記し，「p を法として，α と β は等しい」という[15]．

2 つの零でない複素数 z_1, z_2 の極形式を

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \tag{1.46}$$

とする．

[15] 平たく言えば，α と β は p の整数倍の不定性を除いて等しい，ということ．

積

(1.46) と 3 角関数の加法定理を用いることにより，次の式が証明される：

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]. \tag{1.47}$$

したがって，特に

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}. \tag{1.48}$$

任意の $n \in \mathbb{N}$ と $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ に対して，$z_1 \cdots z_n = (z_1 \cdots z_{n-1}) z_n$ であることに注意して，(1.48) を繰り返し用いると

$$\arg(z_1 \cdots z_n) = \sum_{k=1}^{n} \arg z_k \pmod{2\pi} \tag{1.49}$$

が導かれる（厳密には，帰納法で証明する）．

式 (1.47) の幾何学的意味を調べるために，ある概念を導入する．$t > 0$ とする．複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して，$tz \in \mathbb{C}$ を対応させる写像：$z \mapsto tz$ を**倍率 t の伸張変換** (dilatation transformation) という．容易にわかるように，$|tz| = t|z|$, $\arg(tz) = \arg z \pmod{2\pi}$ であるから，倍率 t の伸張変換は，偏角の主値は変えずに，大きさを t 倍する変換である（図 1.5）．

z_1, z_2 によって表される複素平面上の点をそれぞれ，$\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ とし，積 $z_1 z_2$ に対応する点を P とすれば，線分 OP は，線分 OP_1 を角度 θ_2 だけ正の向きに回転し，それを r_2 倍したものである（あるいは，線分 OP_2 を角度 θ_1 だけ正の向きに回転

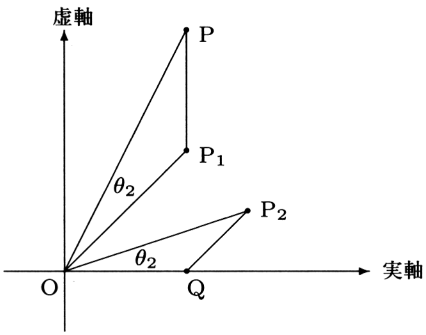
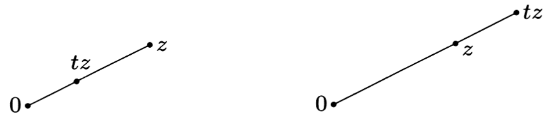


図 1.4　複素数の積



(a) $0 < t < 1$ の場合　　(b) $t > 1$ の場合

図 1.5　伸張変換

し，それを r_1 倍したもの)．したがって，複素数をかける演算は回転と伸張という 2 つの変換に対応する．図 1.4 において，点 Q は複素数 1 を表す点であり，3 角形 P_2OQ と 3 角形 POP_1 は相似である．

■ **例 1.1** ■　$|\alpha| = 1$ である複素数 —— 絶対値が 1 の複素数 —— の極形式は

$$\alpha = \cos\theta_\alpha + i\sin\theta_\alpha$$

$(\theta_\alpha = \arg\alpha)$ であるから，**$\boldsymbol{\alpha}$ を複素数 $\boldsymbol{z}$ にかけることは $\boldsymbol{z}$ を正の向きに角度 $\boldsymbol{\theta_\alpha}$ だけ回転すること**である．特に，虚数単位 i の極形式は

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

であるから，**$\boldsymbol{i}$ を複素数 $\boldsymbol{z}$ にかけることは $\boldsymbol{z}$ を $\boldsymbol{\pi/2}$ (mod $\boldsymbol{2\pi}$) だけ正の向きに回転すること**である．

商

(1.41)，(1.45) および (1.47) により

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]. \tag{1.50}$$

したがって，特に

$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \quad (\mathrm{mod}\, 2\pi). \tag{1.51}$$

冪　乗

(1.47) を繰り返し用いると $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ に対して

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.52}$$

が導かれる．したがって

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{1.53}$$

という美しい式が得られる．これを**ド・モアブルの公式**という[16]．

1.4.3 複素数に付随するベクトル

複素数 $z = x + iy$ に対して，2次元ベクトル $\vec{z} := (x, y) \in \mathbb{R}^2$ がひとつ定まる．これを z **に付随するベクトル**という．

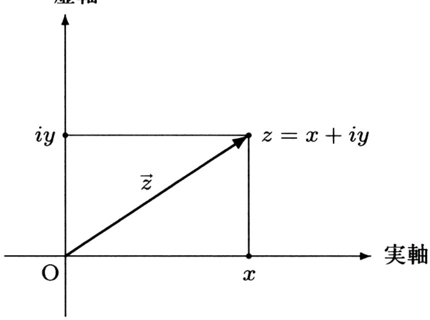


図 1.6　複素数に付随するベクトル

次が成立する（確かめよ）．

(i) 点 $z_1 + z_2$ に付随するベクトルは $\vec{z}_1 + \vec{z}_2$ である．

(ii) 点 $z_1 - z_2$ に付随するベクトルは $\vec{z}_1 - \vec{z}_2$ である．このベクトルを $\overrightarrow{z_2 z_1}$ と記す．

(iii) 点 $z_1 z_2$ $(z_1 \neq 0,\ z_2 \neq 0)$ に付随するベクトルは $\vec{z}_1$ を $\arg z_2$ だけ反時計回りに回転し，それを $|z_2|$ 倍したベクトルである．

複素数 z に付随するベクトル $\vec{z}$ をしばしば，単に「ベクトル z」ともいう．

任意の $z \in \mathbb{C}$ と与えられた複素数 α に対して，対応するベクトルの和 $\vec{z} + \vec{\alpha}$ はベクトル $\vec{z}$ をベクトル $\vec{\alpha}$ だけ平行移動したベクトルを表す（図1.7で $\vec{z}_1 = \vec{z}, \vec{z}_2 = \vec{\alpha}$

---

[16] Abraham de Moivre (1667–1754)．フランスの数学者．

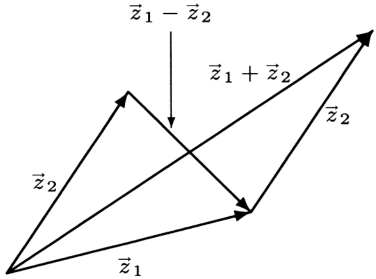


図 1.7　複素数に付随するベクトルの和と差

の場合をイメージせよ）．これに対応する複素数は $z+\alpha$ であるので，複素数 $z+\alpha$ を z の，**複素数 $\boldsymbol{\alpha}$ による平行移動**とよぶ．

2つの2次元ベクトル $\boldsymbol{r}_1 := (x_1, y_1), \boldsymbol{r}_2 := (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して，$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 \in \mathbb{R}$ を

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 := x_1 y_2 - y_1 x_2$$

によって定義する．これを $\boldsymbol{r}_1$ と $\boldsymbol{r}_2$ の**ベクトル積**とよぶ．$\boldsymbol{r}_j$ に対応する複素数を z_j $(j = 1, 2)$ とすれば

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \mathrm{Im}(z_1^* z_2)$$

が成り立つ．

1.5　平面図形の複素数表示

一般に，平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合を**平面図形**とよぶ[17]．ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ と複素平面との対応を用いることにより，平面図形は，複素数を用いて表すことができる．

■ **例 1.2** ■　$\mathbb{R}^2$ の2点 $\boldsymbol{r}_1 := (x_1, y_1), \boldsymbol{r}_2 := (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して定まる集合 $\ell_{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2} := \{\boldsymbol{r}_1 + t(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \mid t \in [0, 1]\}$ を，点 $\boldsymbol{r}_1$ と点 $\boldsymbol{r}_2$ を結ぶ**線分**という．この場合，$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ を線分の**端点**とよぶ．なお，$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2$ の場合は，$\ell_{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2} = \{\boldsymbol{r}_1\}$ であり，これは1点 $\boldsymbol{r}_1$ からなる集合であり，これも便宜上，線分の特殊な場合と考える．

---

[17] これは最も広い意味での「平面図形」の概念である．詳細は略すが，この意味での平面図形の範疇には，通常の感覚的描像では，もはや捉えにくいものが無数に含まれる．

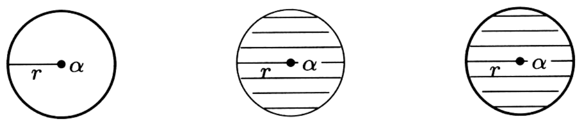
$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ に対応する複素平面の点を z_1, z_2 とすれば，$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ であり，線分 $\ell_{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2}$ は，複素平面では，$\{z_1 + t(z_2 - z_1) \mid t \in [0,1]\}$ と表される．

一般に，複素数 z, z^* に関する関係式を**複素数に関する方程式**あるいは**複素平面での方程式**とよぶ．

■ **例 1.3** ■　よく知られているように，点 $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ を中心とする半径 $r > 0$ の円は，直交座標を用いると，$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$ と表示される．これは，複素平面上では

$$\mathsf{C}_r(\alpha) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| = r\}, \quad \alpha := a + bi \tag{1.54}$$

という点集合として表される．（$\because$ $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とするとき，$|z-\alpha|^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$.）この集合を半径が r で中心が α の**円** (circle) とよぶ[18]．特に，半径が 1 の円を**単位円** (unit circle) という．



円 $\mathsf{C}_r(\alpha)$　　開円盤 $U_r(\alpha)$（周は含まない）　　閉円盤（周も含む）

円 $\mathsf{C}_r(\alpha)$ の内部を表す集合

$$U_r(\alpha) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| < r\} \tag{1.55}$$

を中心が α で半径が r の**開円盤** (open disk) という．この集合の条件を表す不等式で等号が入った集合 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| \le r\}$ を中心が α で半径が r の**閉円盤** (closed disk) という．

■ **例 1.4** ■　$\mathbb{R}^2$ の**曲線の方程式**の一般形は，パラメータ表示では，$x = f(t), y = g(t)$, $t \in [a,b]$ と表される．ただし，a, b $(a < b)$ は実定数で，f, g は $[a,b]$ 上の実数値連続関数である[19]．この曲線を C としよう．曲線 C 上の任意の点 $(f(t), g(t)) \in \mathbb{R}^2$ に対応する複素平面の点は $f(t) + ig(t)$ であるから，曲線 C の複素平面での方程式は，$z = f(t) + ig(t), t \in [a,b]$ となる．こうして，複素平面では，曲線の方程式は，ひとつの方程式にまとめられる．これは重要な点である．

---

[18] **円周** (circumference) ともいう．「円」によって，以下で定義する**閉円盤**を指す場合もあるが，本書では，いま定義した意味で用いる．

[19] $\mathbb{R}^2$ の曲線の一般論については，微分積分学や初等的な解析学の本を参照．

❦**具体例**❦ 原点を中心とする半径 r の円の方程式は，$x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ で与えられる（$a = 0$, $b = 2\pi$, $f(t) = r\cos t$, $g(t) = r\sin t$ の場合）．したがって，この円の複素平面での方程式は $z = r(\cos t + i\sin t)$ である．

複素平面 $\mathbb{C}$ における曲線の一般的概念については，第 2 章で詳しく述べる予定である．

■ **例 1.5** ■ $r > 0, R > 0$ は定数で $r < R$ とする．$\{z \mid r < |z - \alpha| < R\}$ という型の集合を中心が α の**円環領域** (annulus domain) という．これは，中心が α で半径が R の開円盤 $U_R(\alpha)$ から，同じ中心をもつ半径 r の閉円盤を除いてできる集合である．

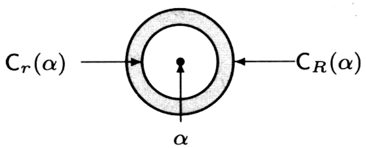


図 1.8 円環領域（$\mathsf{C}_R(\alpha)$ と $\mathsf{C}_r(\alpha)$ で囲まれた部分）

一般に，平面図形を複素数を用いて表すには次のようにすればよい．いま，ある平面図形が，$x, y \in \mathbb{R}$ の実数値関数 $f(x, y)$ を用いて，次のいずれかの条件をみたす集合として表されているとする：(i) $c \leq f(x, y) \leq d$ （c, d は定数で，$c \leq d$）；(ii) $f(x, y) \leq d$; (iii) $c \leq f(x, y)$．それぞれの条件を複素数 $z = x + iy$ で表すには，(1.27) により

$$x = \frac{z + z^*}{2}, \quad y = \frac{z - z^*}{2i} \tag{1.56}$$

であるから，これを $f(x, y)$ の x, y に代入すればよい．したがって，たとえば，(i) の条件は $c \leq f((z + z^*)/2, (z - z^*)/(2i)) \leq d$ と同値である．他の場合も同様．

1.6 複素関数

複素数体 $\mathbb{C}$ の部分集合 D から $\mathbb{C}$ への写像 $f : D \to \mathbb{C}$; $D \ni z \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ を D 上の**複素関数** (complex function)，または**複素写像** (complex mapping) とよび，D を f の**定義域**という．言い方を変えれば，複素関数とは，複素変数の複

素数値関数ということである．本書では，しばしば，複素関数のことを単に関数ともいう．

■ **例 1.6** ■　$\alpha \in \mathbb{C}$ を複素定数（複素数の定数）とする．すべての $z \in D$ に対して，$f(z) = \alpha$ をみたす複素関数 f を**定数関数** (constant function) という．これは最も単純な関数のクラスである．定数関数のことを単に定数とよぶ場合がある．

■ **例 1.7** ■　$\alpha \neq 0, \beta$ を複素定数とするとき $f(z) = \alpha z + \beta,\ z \in \mathbb{C}$ という型の複素関数を **1 次関数** (linear function)，または **1 次写像** (linear mapping) とよぶ．

■ **例 1.8** ■　$f_{\rm re}(z) := z^*,\ z \in \mathbb{C}$ によって定義される写像 $f_{\rm re}$ を**実軸に関する鏡映**，または**実軸に関する反転**という．注意するまでもないかもしれないが，この名称は，$f_{\rm re}$ が，点 z を実軸に関して対称となる位置（実軸に関する対称点または鏡映点）に写すことから来ている．

同様に，$f_{\rm im}(z) := -z^* = -x + iy$ $(z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R})$ によって定義される写像を**虚軸に関する鏡映**，または**虚軸に関する反転**という．

■ **例 1.9** ■　$n \in \mathbb{N}$，α_j $(j = 0, 1, \cdots, n)$ $(\alpha_n \neq 0)$ を複素定数とする．$f(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0,\ z \in \mathbb{C}$ という型の複素関数を **n 次多項式**とよぶ．この場合，n を多項式 f の**次数**，α_j $(j = 0, 1, \cdots, n)$ を f の**係数**という．特に，f の係数がすべて実数であるとき，f を**実数係数**（または**実係数**）**の多項式**とよぶ．

1 次多項式は 1 次関数である．

f, g を多項式（次数は異なってもよい）として，$F(z) = f(z)/g(z)$（$f(z)$ と $g(z)$ の比）という形で与えられる関数 F を**有理関数**という．特に，f, g がともに実数係数の多項式であるとき，F を**実数係数の有理関数**とよぶ．

もちろん，上記の例以外にも，基本的かつ重要な複素関数は数多く存在する．それらについては，本書の論述が進む中で，適宜，取り上げていく予定である．

各 $z = x + iy \in D$ に対して，$\mathbb{R}^2$ の点 (x, y) が一意的に定まるので，$u(x, y) := \operatorname{Re} f(z)$（$f(z)$ の実部），$v(x, y) := \operatorname{Im} f(z)$（$f(z)$ の虚部）とおけば，u, v は (x, y) の実数値関数であり

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{1.57}$$

と表される．

! 注意 1.1　精密な言い方をするならば，u, v は，$D \subset \mathbb{C}$ に対応する，$\mathbb{R}^2$ の部分集合 $D_{\mathbb{R}^2} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + iy \in D\}$ 上の実数値関数である．だが，以下では，

便宜上，D と $D_{\mathbb{R}^2}$ を同一視して，u, v も D 上の実数値関数とよぶ．

$w = f(z)$ とおこう．このとき，z が D の中を動くとき，w は $\mathbb{C}$ の部分集合 $f(D) = \{f(z) \mid z \in D\}$（$f$ による D の像）を動く．そこで，便宜上，複素関数の定義域を与える集合としての複素平面を **z 平面**，複素関数の終域としての複素平面を **w 平面**という（図 1.9）．

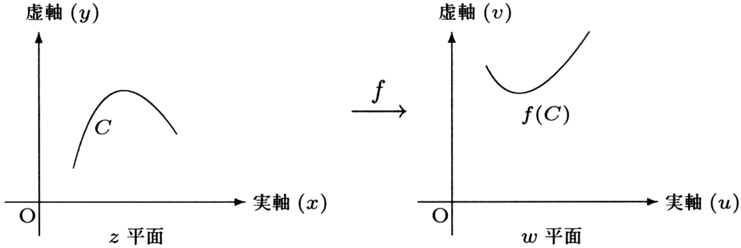


図 1.9　z 平面と w 平面（C は曲線）

1.7　円々対応と 1 次分数関数

1.7.1　複素関数の像：簡単な例

直線や円または円盤（開円盤または閉円盤）は複素平面における基本的な幾何学的対象である．そこで，これらの図形が，複素写像によって，どのような図形に写るかを考察することは自然であり，重要性をもつ．まず，簡単な例を見てみよう．

■ **例 1.10** ■　1 次関数 $f(z) = \alpha z + \beta$（例 1.7; $\alpha \neq 0$）が直線をどのような図形に写すかをまず調べる．ℓ を直線とし，その方程式を $ax + by = c$（$a, b, c \in \mathbb{R}$ は定数）とする．これは，(1.27) によって，$z\eta + z^*\eta^* = c$ と同値である．ただし，$\eta := (a - bi)/2$．$z \in \ell$ に対して，$w = f(z)$ とおき，$\chi := \eta/\alpha$ とすれば，直接計算により，$w\chi + w^*\chi^* = c + \beta\chi + \beta^*\chi^*$ が成立することがわかる．右辺は実定数であるから，これは w 平面における直線の方程式である．したがって，ℓ の f による像 $f(\ell)$ は直線である．

次に f が円をどのような図形に写すかを調べる．中心が $\gamma \in \mathbb{C}$ で半径が R の円 $\mathsf{C}_R(\gamma)$ を考える．$z \in \mathsf{C}_R(\gamma)$ であることと $|z - \gamma| = R$ は同値である．$\alpha z + \beta = \alpha(z - \gamma) + \alpha\gamma + \beta$ と変形することにより，$w - (\alpha\gamma + \beta) = \alpha(z - \gamma)$ が得られる．両

辺の絶対値をとれば $|w-(\alpha\gamma+\beta)| = |\alpha|R$. したがって，$w$ は中心が $\alpha\gamma+\beta = f(\gamma)$ で半径が $|\alpha|R$ の円を動く．ゆえに，f は円を円に写す．この場合，f の像の円の半径は $|\alpha|$ 倍になることに注意しよう．

■ 例 1.11 ■　関数 $f(z) = \dfrac{1}{z}, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が直線と円をどのような図形に写すかを調べよう．

$z = x + iy$, $w = f(z) = u + iv$ とおき，$z = 1/w$ とみれば

$$x = \frac{u}{u^2+v^2}, \quad y = \frac{-v}{u^2+v^2}. \tag{1.58}$$

(1) 直線の像．$y = ax + b$（$a, b \in \mathbb{R}$ は定数）とすれば，

$$-\frac{v}{u^2+v^2} = \frac{au}{u^2+v^2} + b$$

であるから，$b \neq 0$ ならば

$$\left(u + \frac{a}{2b}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{2b}\right)^2 = \frac{a^2+1}{4b^2}.$$

これは w 平面における円を表す（ただし，原点を除く）．したがって，原点を通らない，傾きが有限の直線は，f によって，円の一部に写される．

原点を通る，傾きが有限の直線は $y = ax$ で表されるが（$b = 0$ の場合），この直線は，原点を除いて，w 平面の直線 $v = -au$（ただし，w 平面の原点を除く）に写される．

原点を通らない，虚軸に平行な直線の方程式は $x = c$（$c \neq 0$ は実定数）で表される．この場合は

$$\left(u - \frac{1}{2c}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4c^2}$$

となるが，これも円（ただし，原点を除く）を表す．

(2) 円の像．点 $\alpha = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ を中心とする半径 $R > 0$ の円 $\mathsf{C}_R(\alpha)$ を考える．$z \in \mathsf{C}_R(\alpha)$ とすれば，$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ であるから

$$x^2 + y^2 - 2xa - 2yb + |\alpha|^2 = R^2.$$

この式の x, y に (1.58) を代入して整理すれば，次の結果が得られる：

(i) $R \neq |\alpha|$ のとき

$$\left(u + \frac{a}{R^2-|\alpha|^2}\right)^2 + \left(v - \frac{b}{R^2-|\alpha|^2}\right)^2 = \left(\frac{R}{|R^2-|\alpha|^2|}\right)^2. \tag{1.59}$$

(ii) $R = |\alpha|$ のとき（この場合，$\mathsf{C}_R(\alpha)$ は原点 0 を通るので，考察すべき部分集合は $\mathsf{C}_R(\alpha) \setminus \{0\}$ である）

$$2au - 2bv = 1.$$

(i) の場合は，w が，点 $-\alpha^*/(R^2 - |\alpha|^2)$ を中心とする，半径 $R/|R^2 - |\alpha|^2|$ の円を動くことを意味する．したがって，この場合，f は円を円に写す．

(ii) の場合，$f(\mathsf{C}_R(\alpha) \setminus \{0\})$ は w 平面における直線である．

写像 $f(z) = 1/z$ の幾何学的意味を考えてみよう．極形式 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ を用いると，(1.45) によって，$f(z) = r^{-1}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$．これから，$f$ は，原点を中心とする半径 R の円 $\mathsf{C}_R(0)$ を，原点を中心とする半径 R^{-1} の円に写すことがわかる．しかも，この場合，その写しは，$\mathsf{C}_R(0)$ を実軸に関して鏡映（反転）する形で行われる．したがって，特に，この f は単位円を実軸に関して反転させる働きをもつ．

これらの例に示された構造，すなわち，直線または円が，複素写像によって，直線または円あるいは円の一部に写される構造は興味深いものである．ところで，直線は，広い意味で半径が無限大の円と考えることができる．そこで，いま特徴づけた性質をもつ複素写像（複素関数）を**円々対応** (circle-relationship) という．すなわち，写像 $f: D \to \mathbb{C}$ が円々対応であるとは，D に含まれる任意の円 C（直線またはその一部も含む）に対して，$f(\mathsf{C})$ が「円または直線」の全体あるいは一部である場合をいう．

1.7.2 1 次分数関数

1 次関数や例 1.11 の関数の一般化を考える．$ad - bc \neq 0$ をみたす複素定数 a, b, c, d に対して，$D_{c,d} := \{z \in \mathbb{C} \mid cz + d \neq 0\}$ を定義域とする

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

という型の複素関数を **1 次分数関数** (linear fractional function)，または **1 次分数変換** (linear fractional transformation) という[20]．$c \neq 0$ のとき

$$az + b = \frac{a}{c}(cz + d) - \frac{ad}{c} + b$$

[20] **メービウス変換**という場合もある．ちなみに，メービウス (August Ferdinand Möbius, 1790–1868) はドイツの天文学者，数学者．ライプチヒ大学天文学教授．射影幾何学の基礎を樹立．面の表裏の区別のつかない，いわゆる「メービウスの帯」は，現今では，一般の人にも知られていよう．

と変形することにより，次の表式が得られる：

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{a}{c} - \dfrac{ad-bc}{c(cz+d)} & ;\ c \neq 0 \\ \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d} & ;\ c = 0 \end{cases}.$$

したがって，$ad - bc \neq 0$ であるから，$c \neq 0$ のとき，f は定数関数でない．さらに，$c \neq 0$ のとき，$g(z) := 1/z$, $\alpha := b - (ad/c)$, $\beta = a/c$ とおけば，$f(z) = \alpha g(cz+d)+\beta$ と書けることがわかる．すでに見たように，対応：$z \mapsto w = cz+d$ は円々対応であり，対応：$w \mapsto \alpha g(w) + \beta$ も円々対応であるから，f も円々対応である．

1 次分数変換は，特別な場合として，次の変換を含むことに注意しよう（括弧内は幾何学的意味）．

$$w = z + b \quad (\text{複素数}\, b\, \text{による平行移動}), \tag{1.60}$$

$$w = az,\ \text{ただし，}\ |a| = 1 \quad (\text{原点のまわりの回転}), \tag{1.61}$$

$$w = az + b, \tag{1.62}$$

$$w = \frac{1}{z}, \quad z \neq 0. \tag{1.63}$$

1.8 基本的な複素関数の例

この節では，1 次分数関数以外の複素関数で基本的なものを取り上げる．

1.8.1 指数関数

実数 x に対して，$e^x = \exp(x)$ は通常の指数関数を表す（e は**ネピア数**[21]）．この指数関数の定義域を複素数まで拡張することを考える．結論から言えば，次のようになる．$z \in \mathbb{C}$ に対して，複素数

$$e^z := e^x(\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy \tag{1.64}$$

を対応させる写像 $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C};\ z \mapsto e^z$ を**指数関数** (exponential function) と

[21] $e := \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$．ネピア (John Napier, 1550–1617) はイギリス（スコットランド）の数学者，技術者．スコットランドの貴族．対数の創始者，小数記号の導入者．

いう ($\exp z = e^z$)．$y = 0$ ならば，$\cos y = 1, \sin y = 0$ であるから，$e^z = e^x$．したがって，e^z は，確かに，実変数の指数関数を特殊な場合として含む．すなわち，e^z は実変数の指数関数の，複素変数への拡張になっている．

定義から（$z = i\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$ ならば $x = 0$, $y = \theta$ に注意）

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{1.65}$$

これを**オイラーの公式**という[22]．したがって，特に

$$e^{2n\pi i} = 1, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.66}$$

$$e^{\pi i/2} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{3\pi i/2} = -i. \tag{1.67}$$

指数関数の基本的性質を証明しよう（$z_1, z_2, z = x + iy \in \mathbb{C}$ は任意）．

(E.1) $|e^z| = e^x$．したがって，$e^z \neq 0$.

証明　これは定義 (1.64) と極形式の性質による． ■

(E.2) $|e^{i\theta}| = 1,\ \theta \in \mathbb{R}$.

証明　(E.1) で $x = 0, y = \theta$ の場合を考えればよい． ■

(E.3) (i) $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.　(ii) $(e^z)^* = e^{z^*}$.

証明　(i) (1.45) と (E.1) によって，$1/e^z = e^{-x}[\cos(-y) + i\sin(-y)] = e^{-x+i(-y)} = e^{-z}$. (ii) $(e^z)^* = e^x(\cos y - i\sin y) = e^x[\cos(-y) + i\sin(-y)] = e^{x-iy} = e^{z^*}$. ■

(E.4) $\arg e^z = y \pmod{2\pi}$.

証明　定義から自明． ■

---

[22] Leonhard Euler (1707–1783). スイスの天才的数学者，数理物理学者，物理学者．数学，数理物理学の多くの分野で重要な業績を残した．また，数学，物理学以外の学問（医学，植物学，化学，神学，東洋諸国語等）も研究し，論文数は 700 点，著書は 45 種にのぼるといわれる．

(E.5) $e^{z+2n\pi i} = e^z, \quad n \in \mathbb{Z}.$

証明　$\cos(y+2n\pi) = \cos y$, $\sin(y+2n\pi) = \sin y$ による． ■

(E.6) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ （指数法則）．

証明　$z_1 = x_1+iy_1, z_2 = x_2+iy_2$ とおけば，$z_1+z_2 = (x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$. したがって，$e^{z_1+z_2} = e^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)]$．一方，(1.47) を応用することにより

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}e^{x_2}(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)]. \end{aligned}$$

よって，題意の式が成立する． ■

(E.7) $e^z = 1$ ならば，ある整数 n があって，$z = 2n\pi i$.

証明　$e^z = 1$ ならば，$e^x = 1$, $\cos y = 1$, $\sin y = 0$．したがって，$x = 0$, $y = 2n\pi$ （n は，ある整数）． ■

(E.8) $e^z = -1$ ならば，ある整数 n があって，$z = (2n+1)\pi i$.

証明　$e^z = -1$ ならば，$-1 = e^{\pi i}$ と指数法則により，$e^{z-\pi i} = 1$．したがって，(E.7) によって，$z - \pi i = 2n\pi i$ （n は，ある整数）．ゆえに題意が成立する． ■

性質 (E.6) は，e^z を指数関数とよぶことの根拠のひとつを与えるものである．オイラーの公式 (1.65) を用いると z の極形式は

$$z = re^{i\theta}, \quad r = |z|,\ \theta = \arg z \tag{1.68}$$

という簡潔な形に表される．これは以下で頻繁に使われることになる．

一般に，複素関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ について，複素定数 ω があって，すべての $z \in \mathbb{C}$ に対して，$f(z+\omega) = f(z)$ が成り立つとき，f は**周期的** (periodic) であるといい，ω を**周期**という．

指数関数の性質 (E.5) は，指数関数 e^z が周期 $2n\pi i$（$n \in \mathbb{Z}$ は任意）の周期関数であることを示している．

1.8.2 3角関数

実変数 $x \in \mathbb{R}$ の 3 角関数 $\cos x, \sin x$ は複素変数 $z \in \mathbb{C}$ の関数に次のようにして拡張される：

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{1.69}$$

オイラーの公式により，z が実数の場合は，$\cos z, \sin z$ はそれぞれ，実変数の余弦関数，正弦関数に等しいことがわかる．そこで，$\cos z, \sin z$ $(z \in \mathbb{C})$ をそれぞれ，**複素余弦関数**，**複素正弦関数**とよぶ．だが，混乱の恐れがない場合には，単に，余弦関数，正弦関数ということが多い．

他の 3 角関数は実変数の場合と同様に定義される（名称もそのまま引き継ぐ）．たとえば

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z := \frac{\cos z}{\sin z}, \tag{1.70}$$

$$\sec z := \frac{1}{\cos z}, \quad \operatorname{cosec} z := \frac{1}{\sin z}. \tag{1.71}$$

なお，一般に，関数の定義にあたっては，特に断らない限り，分母が 0 となる点はその定義域から除外される．

3 角関数について，以下の諸公式が成立する．

平方関係式 すべての $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

証明 $\cos^2 z = (1/4)(e^{iz}e^{iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-iz}e^{-iz})$．そこで，指数法則を使えば, $\cos^2 z = (1/4)(e^{2iz}+2+e^{-2iz})$．同様に, $\sin^2 z = (-1/4)(e^{2iz}-2+e^{-2iz})$．これらの式の両辺を加えることにより，示すべき式が得られる． ∎

加法定理 すべての $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \tag{1.72}$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2. \tag{1.73}$$

証明　指数法則を使うことにより

$$\sin z_1 \cos z_2 = \frac{1}{4i}(e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}).$$

z_1 と z_2 を入れ替えることにより

$$\sin z_2 \cos z_1 = \frac{1}{4i}(e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}).$$

したがって,

$$\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 = \frac{1}{4i}(2e^{i(z_1+z_2)} - 2e^{-i(z_1+z_2)}) = \sin(z_1+z_2).$$

関係式 (1.73) も同様にして証明される（確かめよ）. ∎

周期性　すべての $n \in \mathbb{Z}$ と $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\sin(z+2n\pi) = \sin z, \quad \cos(z+2n\pi) = \cos z,$$
$$\tan(z+n\pi) = \tan z, \quad \cot(z+n\pi) = \cot z.$$

証明　加法定理と $\cos 2n\pi = 1$, $\sin 2n\pi = 0$, $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$ を使えばよい. ∎

1.8.3　双曲線関数

実変数の双曲線関数も次のようにして，複素変数のそれへと拡張される：

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{1.74}$$

$\cosh z$ を**双曲線余弦関数**, $\sinh z$ を**双曲線正弦関数**とよぶ.

容易にわかるように

$$\cosh z = \cos(-iz), \quad \sinh z = i\sin(-iz). \tag{1.75}$$

したがって，3 角関数に関する加法定理から，双曲線関数に関する加法定理が導かれる．たとえば，(1.72), (1.73) から

$$\sinh(z_1+z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2, \tag{1.76}$$

$$\cosh(z_1+z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C} \tag{1.77}$$

が得られる[23]．ここで，第 2 式の右辺の足し算の符号は + であることに注意しよう．3 角関数の平方関係式からは

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \tag{1.78}$$

(左辺のマイナスに注意) が導かれる[24]．

1.8.4 対数関数

通常の対数関数 $\log x$ $(x > 0)$ —— $e^{\log x} = x$ となる関数 —— の定義域は正の実数全体である．この関数についても，以下のようにして，その定義域を複素平面の部分集合へと拡張できる．

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して，$e^w = z$ をみたす $w \in \mathbb{C}$ を z の**対数** (logarithm) といい

$$w = \log z \tag{1.79}$$

と書く．したがって

$$e^{\log z} = z. \tag{1.80}$$

$\log z = u + iv$ $(u, v \in \mathbb{R})$ とおき，$z \neq 0$ の極形式 $z = re^{i\theta}$ を用いると $e^{u+iv} = re^{i\theta}$．したがって，$e^u = r, v = \theta + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$．ゆえに $u = \log r$ であり

$$\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi) = \log |z| + i \arg z \tag{1.81}$$

と表示が得られる．以下，正の数 $a > 0$ に対しては，$\log a$ は通常の自然対数を表すものとする．

各 $z \neq 0$ に対して対応 $\log : z \mapsto \log z$ を考えると，(1.81) からわかるように，$\log z$ は，n ごとに異なる値をとるので，この対応は**無限多価写像** (変数の各値に対して，無限個の値を割り当てる対応) を与える．この無限多価写像を**対数関数**という．

対数関数の多価性を消去する方法のひとつは，定義域を制限することである．実際，任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$D_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \alpha - \pi < \arg z \leq \alpha + \pi\} \tag{1.82}$$

---

[23] もちろん，直接計算しても証明される．

[24] これも，直接計算により，証明することができる．

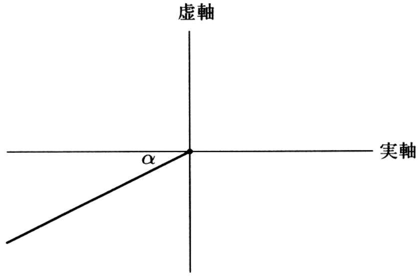


図 1.10　D_α $(0 < \alpha < \pi/2$ の場合)

を導入し（図 1.10 を参照）

$$\log_\alpha z := \log|z| + i \arg z, \quad z \in D_\alpha \tag{1.83}$$

とすれば，$\log_\alpha z$ は D_α を定義域とする 1 価関数で単射であり

$$e^{\log_\alpha z} = z, \quad z \in D_\alpha \tag{1.84}$$

が成り立つ．

$\log_\alpha z$ を D_α における対数関数 $\log z$ の**分枝** (branch) または単に**枝**という．この場合，$z = 0$ を $\log z$ の**分岐点**とよぶ．

部分集合 D_α は，幾何学的には，複素平面 $\mathbb{C}$ に，いわば，半無限直線 $L_\alpha := \{re^{i(\alpha+\pi)} \mid r \geq 0\} = \{re^{i(\alpha-\pi)} \mid r \geq 0\}$ による "切断 (cut)" をいれることにより，得られる．このような直線を**切断線**といい，切断により得られる部分集合 $\mathbb{C} \setminus L_\alpha$ $(= D_\alpha \setminus L_\alpha)$ を**切断平面** (cut plane) という．

対数関数以外の多価関数についても，複素平面の切断の概念を考えることは可能である．要するに，多価関数の定義域を制限し，それを 1 価関数とみるためのひとつの方法が切断である．また，線分（無限直線，半無限直線を含む）$L \subset \mathbb{C}$ 上の点に対して，ある関数 f の値を定義することが自明でないときに，L を除いた部分集合上で f を考えるような場合にも，L を切断線，$\mathbb{C} \setminus L$ を切断平面という場合がある．

各 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して

$$\begin{aligned} &\operatorname{Log} z := \log_0 z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z, \\ &z \in D_0 = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid -\pi < \arg z \leq \pi\} \end{aligned} \tag{1.85}$$

($\mathrm{Arg}\, z$ は偏角の主値) を対応させる写像 $\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ を**対数関数の主値**とよぶ．これを用いると

$$\log z = \mathrm{Log}\, z + 2n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{1.86}$$

と表される．

z が正の実数 $x > 0$ ならば，$\mathrm{Arg}\, x = 0$ であるから，$\mathrm{Log}\, x$ は，通常の自然対数関数 $\log x$ $(x > 0)$ と一致する．

z が負の実数 $-x$ $(x > 0)$ のときは，$\mathrm{Arg}(-x) = \pi$ であるから，

$$\mathrm{Log}(-x) = \log x + \pi i, \quad x > 0 \tag{1.87}$$

が成り立つ（右辺の $\log x$ は正変数 $x > 0$ の対数関数）．

1.8.5 累乗関数

指数関数の指数法則を用いると，任意の整数 n と任意の複素数 $z \neq 0$ に対して

$$z^n = e^{n \log z} \tag{1.88}$$

が成り立つことがわかる（$e^{n \log z} = e^{z_1 + \cdots + z_n}$, $z_j = \log z$, $j = 1, \cdots, n$ とみる）．この式の拡張として，一般の複素数 $\nu \in \mathbb{C}$ に対して，$z \neq 0$ の ν 乗 z^ν を

$$z^\nu := e^{\nu \log z} \tag{1.89}$$

によって定義する．$\nu = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とすれば，(1.86) より

$$z^\nu = e^{\nu\, \mathrm{Log}\, z} e^{-2b\pi n} e^{2na\pi i}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

したがって，次の場合がありうる：

(i) $b \neq 0$（すなわち，$\mathrm{Im}\, \nu \neq 0$）ならば，対応 : $z \mapsto z^\nu$ は無限多価である．

(ii) $b = 0$ でも a が整数でなければ，$z^\nu = z^a$ は多価である．

対応 : $z \mapsto z^\nu$ によって定まる写像を**累乗関数**または**冪関数**という．ν をその**冪**とよぶ．

累乗関数の多価性をなくすには，対数関数の場合と同様の考えにしたがって，定

義域を制限すればよい．実際

$$z_\alpha^\nu := e^{\nu \log_\alpha z}, \quad z \in D_\alpha \tag{1.90}$$

とおけば，これは D_α 上の 1 価関数である．z_α^ν を D_α における z^ν の**分枝**または**枝**という．この場合，$z=0$ は z^ν の**分岐点**とよばれる．

任意の自然数 n に対して，$\nu = 1/n$ の場合の冪関数 $z^{1/n}$ は $\boldsymbol{n}$ **価関数**（変数の各値に対して，n 個の値を割り当てる対応）である．実際，極形式 $z = re^{i\theta}$ を用いると

$$z^{1/n} = r^{1/n} e^{(\theta+2k\pi)i/n} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \tag{1.91}$$

と表される．ただし, $k = 0, 1, \cdots, n-1$ である ((1.91) の右辺において, $k = \ell n + j$, $\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $j = 0, \cdots, n-1$ の場合は，$k = j$ の場合に等しいことに注意)．n 価関数 : $z \mapsto z^{1/n}$ を z の $\boldsymbol{n}$ **乗根**(こん)という．これを $\sqrt[n]{z}$ と表す場合もある．この命名は，容易に確かめられる式

$$(z^{1/n})^n = z \tag{1.92}$$

が成立することによる．なお

$$0^{1/n} := 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

と定義する．

特に，$n = 2$ の場合，すなわち，$z^{1/2}$ を z の**平方根**という．容易にわかるように

$$z^{1/2} = |z|^{1/2} e^{i \operatorname{Arg} z/2}, \quad -|z|^{1/2} e^{i \operatorname{Arg} z/2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{1.93}$$

$z \neq 0$ に対して，n 価関数 $z^{1/n}$ の値 —— (1.91) によって与えられる n 個の値 —— は，幾何学的には，原点を中心とする半径 $r^{1/n}$ の円周上に存在する．$n \geq 3$ ならば，それらは，この円に内接する正 n 角形の頂点を形成する．

$\theta = \operatorname{Arg} z$ にとり，(1.91) で $k = 0$ として得られる値

$$\text{p.v.}\, z^{1/n} := |z|^{1/n} e^{i \operatorname{Arg} z/n} \tag{1.94}$$

を $z^{1/n}$ の**主値**という．ここで，“p.v.” は主値 (principal value) を表す記号である．

■ **例 1.12** ■　$i^{1/2} = e^{i\pi/4}, -e^{i\pi/4}$. $i^{1/2}$ の主値 $e^{i\pi/4}$ を $\operatorname{Re} i^{1/2} > 0$ となる，$i^{1/2}$

の枝ともいう．

■ **例 1.13** ■ **1 の n 乗根．** $z=1$ の n 乗根は

$$1^{1/n}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=e^{2\pi ik/n},\quad k=0,1,\cdots,n-1$$

で与えられる．したがって

$$\omega_n=e^{2\pi i/n}=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$$

とおけば，$1^{1/n}$ の n 個の値は

$$1,\ \omega_n,\ \omega_n^2,\ \cdots,\ \omega_n^{n-1}$$

と表される．これらは単位円上にあり，$n\geq 3$ のとき，単位円に内接する正 n 角形の頂点をなす（図 1.11）．

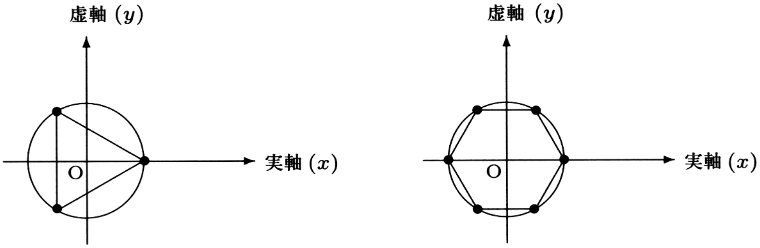


図 1.11 $1^{1/3}$ の値と $1^{1/6}$ の値

■ **例 1.14** ■ n を自然数とする．与えられた複素数 $\alpha_0,\cdots,\alpha_n$ $(\alpha_n\neq 0)$ に対して，複素数 z に関する関係式

$$\alpha_n z^n+\alpha_{n-1}z^{n-1}+\cdots+\alpha_1 z+\alpha_0=0 \tag{1.95}$$

を **z の n 次方程式**とよび，これをみたす複素数 z をその**解**（1 つとは限らない），または**根**（こん）という．また，α_k $(k=0,\cdots,n)$ を方程式の係数という．これらがすべて実数であるとき，(1.95) を**実数係数**（または**実係数**）**の n 次方程式**とよぶ．

(i) **1 次方程式** $\alpha z+\beta=0$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{C},\ \alpha\neq 0)$ の解はただ 1 つであり，それは $z=-\beta/\alpha$ によって与えられる．

(ii) **n 次方程式の特殊形**：$z^n = \alpha$ の解は $z = \alpha^{1/n}$ （n 個）で与えられる．

証明　与式は，$(z/\alpha^{1/n})^n = 1$ と同値．したがって，$z/\alpha^{1/n} = 1^{1/n} = e^{2\pi ik/n}$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$．ゆえに

$$z = \alpha^{1/n} e^{2\pi ik/n} = |\alpha|^{1/n} e^{(i \arg \alpha + 2\pi ik)/n} = \alpha^{1/n}.$$ ∎

(iii) **2 次方程式**

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0 \tag{1.96}$$

$(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C},\ \alpha \neq 0)$ の解は，高々 2 つであり，それらは

$$z = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \tag{1.97}$$

で与えられる．ただし，$\sqrt{w}$ は $w^{1/2}$ の主値を表す．(1.97) を **2 次方程式 (1.96) の解（根）の公式**という．

証明　実変数の 2 次式を完全平方にするのとまったく同じ仕方で

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = \alpha \left(z + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha} + \gamma \tag{1.98}$$

と変形できる．したがって，(1.96) は

$$\left(z + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$$

と同値である．ゆえに (1.97) を得る． ∎

1.8.6　複素数を底とする指数関数

$a \neq 0$ を複素定数とし，任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して，**a の z 乗** a^z を

$$a^z := e^{z \log a} \tag{1.99}$$

によって定義する．これを **a を底とする指数関数**という．$\log a$ を主値にとった場合の値

$$\mathrm{p.v.}a^z := e^{z\ \mathrm{Log}\, a} \tag{1.100}$$

を a^z の**主値**という．対応：$z \mapsto \mathrm{p.v.}a^z$ は 1 価関数を与える．

1.9 多価関数のリーマン面

対数関数や累乗関数の多価性を曖昧さなく議論するために，定義域を制限する処方についてはすでに述べた．これとは逆に，以下に記述するような仕方で，定義域を拡大することにより，これらの関数を 1 価関数に直す方法もある．

1.9.1 対数関数のリーマン面

各整数 n に対して，複素平面を 1 枚割り当て，これを $\mathbb{C}(n)$ と記す ($\mathbb{C}(n) := \mathbb{C}$)．この場合，$n \neq m$ ならば，$\mathbb{C}(n)$ と $\mathbb{C}(m)$ は別の集合とみなし，部分集合

$$\Pi_n := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid n\pi - \pi < \arg z < n\pi + \pi\}$$

は $\mathbb{C}(n)$ の部分集合とみる．そこで，Π_n の和集合

$$\mathbb{D} := \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} \Pi_n$$

を考える．集合

$$\mathbb{F}_n := \{z \mid n\pi < \arg z < (n+1)\pi\}$$

は，Π_n または Π_{n+1} の部分集合とみなせるが，これらを同一視する．すなわち，$\Pi_n \cap \Pi_{n+1} = \mathbb{F}_n$ と規約する．n が偶数のとき，$\mathbb{F}_n$ は平面 $\mathbb{C}(n)$ における上半平面であり，n が奇数のとき，$\mathbb{F}_n$ は平面 $\mathbb{C}(n)$ における下半平面である（図 1.12 を参照）．したがって，この同一視は，幾何学的には，n の偶奇に応じて，Π_n と Π_{n+1} の上または下の半分を "貼り合わせる" ことを意味する．このようにして，$\mathbb{D}$ は幾何学的には 1 枚の面とみなせる．

$\mathbb{D}$ の元を $\boldsymbol{z}$ で表すとき，ある n があって，$\boldsymbol{z} \in \Pi_n$ である．したがって

$$\boldsymbol{z} = re^{i\theta}, \quad r = |\boldsymbol{z}|, \quad n\pi - \pi < \theta < n\pi + \pi$$

と一意的に表される．(別の m があって，$\boldsymbol{z} \in \Pi_m$ であれば $\boldsymbol{z} \in \Pi_m \cap \Pi_n$ であるが，$\Pi_m \cap \Pi_n \neq \emptyset$ であるのは，$m = n + 1$ または $m = n - 1$ の場合に限る．だが，$\mathbb{D}$ の構成に仕方によって，いずれの場合でも偏角は一意的に決まる．）これに基づいて，1 価関数 $\log \boldsymbol{z}$ を

$$\log \boldsymbol{z} := \log r + i\theta \tag{1.101}$$

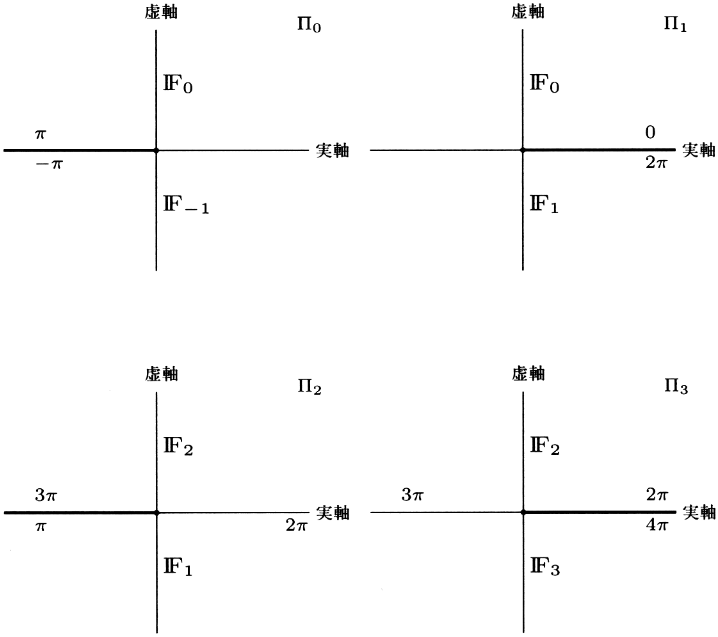


図 1.12　集合 Π_n と $\mathbb{F}_n$

によって定義できる．拡大された定義域 $\mathbb{D}$ を **$\log z$ のリーマン面** (Riemann surface) という[25]．各 Π_n は原点を含まないので，$\mathbb{D}$ は原点を含まない．

1.9.2　累乗関数のリーマン面

$a \in \mathbb{C}$ から決まる累乗関数 z^a は，一般には多価関数である．これを 1 価関数としてとらえるには定義式

$$z^a = e^{a \log z}$$

に注目すればよい．すなわち，リーマン面 $\mathbb{D}$ を定義域とする関数 $\boldsymbol{z}^a$ を

$$\boldsymbol{z}^a := e^{a \log \boldsymbol{z}} \tag{1.102}$$

によって定義すればよい．

---

25) Bernhard Riemann (1826–1866) はドイツの天才的数学者．本書の主題である複素関数論において独創的で重要な業績を数多く残すとともに，幾何学の方面では，今日，リーマン幾何学とよばれる非ユークリッド幾何学の理論を創始し，幾何学の概念を一新した．

指数 a が $1/n$ の場合は，$z^{1/n}$ の定義域を $\mathbb{D}$ よりも狭くとっても，その値域は変わらないことが以下のようにしてわかる．まず，絶対値が r で偏角が θ の点 $z \in \mathbb{D}$ を $z(r,\theta)$ で表すとき

$$z(r,\theta+2n\pi)^{1/n} = z(r,\theta)^{1/n}$$

が成り立つことに注意する．これは，$z(r,\theta)^{1/n}$ が θ の関数としては周期が $2n\pi$ の周期関数であることを意味する．したがって，関数 $z^{1/n}$ に関して偏角の範囲を α から $\alpha+2n\pi$（$\alpha \in \mathbb{R}$ は任意）に制限して得られる写像の値域と，もともとの関数 $z^{1/n}$ の値域は同じである．ここで述べた定義域は，たとえば，

$$\mathcal{R}_{1/n} := \Pi_0 \cup \Pi_1 \cup \cdots \cup \Pi_{2n-1}$$

で与えられる．ただし，Π_{2n-1} の下半分を Π_0 の下半分と同一視する（“貼り合わせ” する）．集合 $\mathcal{R}_{1/n}$ を**関数 $z^{1/n}$ のリーマン面**という．

■ **例 1.15** ■　$z^{1/2}$ のリーマン面は $\mathcal{R}_{1/2} = \Pi_0 \cup \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3$ である．図 1.12 において，Π_0 と Π_1 の上半平面，Π_1 と Π_2 の下半平面，Π_2 と Π_3 の上半平面，Π_3 と Π_0 の下半平面を貼り合わせてできる面である．

演習問題

1. $a > 0$ とする．複素平面において，不等式 $\mathrm{Re}(1/z) < 1/a$ をみたす点 z の集合を求め，それを図示せよ．

2. 複素平面において，次の条件 (i), (ii) をみたす点 z の集合をそれぞれの場合に求め，図示せよ．

(i) $\mathrm{Re}(z^2) > 0$.　(ii) $\mathrm{Im}(z^2) > 0$.

3. $a > 0$ とする．写像 $f(z) = 1/(az+1)$ によって，z 平面上の虚軸はどのような集合に写されるか．

4. 写像 $w = f(z) = z^2$ とする．

(i) f によって，w 平面上の実軸と平行な直線 $\mathrm{Im}\, w = c$（$c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ は定数）へと写される，z 平面上の点集合 D_c を求めよ．

(ii) f によって，w 平面上の虚軸と平行な直線 $\mathrm{Re}\, w = d$（$d \in \mathbb{R}$ は定数）へと写される，z 平面上の点集合 F_d を求めよ．

5. 写像 $w = f(z) = e^z$ とする．

(i) f によって，z 平面上の実軸と平行な直線 $\mathrm{Im}\, z = c$（$c \in \mathbb{R}$ は定数）へと写される，w 平面上の点集合 W_c を求めよ．

(ii) f によって，z 平面上の虚軸と平行な直線 $\mathrm{Re}\, z = d$（$d \in \mathbb{R}$ は定数）へと写される，z 平面上の点集合 X_d を求めよ．

6. 平面上の任意の 3 角形は，任意の倍率の伸張変換によって，相似な 3 角形に写されることを示せ．

7. n を任意の自然数とする．

(i) $f(z)$ を実数係数の n 次多項式とするとき，$f(z)^* = f(z^*)$ を示せ．

(ii) 実数係数の n 次方程式の 1 つの解を α とすれば，その共役 α^* もまた同じ方程式の解であることを示せ．

8. 次の式を証明せよ．

(i) $\sin(-z) = \sin z, \quad \cos(-z) = \cos z.$

(ii) $(\sin z)^* = \sin z^*, \quad (\cos z)^* = \cos z^*.$

(iii) $\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z.$

(iv) $\sin i = \dfrac{e^2 - 1}{2e} i, \quad \cos i = \dfrac{e^2 + 1}{2e}.$

9. 次の式を証明せよ．

(i) $e^{n\pi i} = (-1)^n,\ n \in \mathbb{Z}.$　(ii) $e^{n\pi i/2} = i^n,\ n \in \mathbb{Z}.$

10. 次の式を証明せよ．

(i) $\log(-1) = (2n+1)\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}.$

(ii) $\log i = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}.$

(iii) $i^i = e^{-(4n+1)\pi/2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

(iv) $(i^i)^i = -i$.

11. 次の式を証明せよ[26].

(i) $\sin^{-1} z = -i \log(iz + (1 - z^2)^{1/2})$,

(ii) $\cos^{-1} z = -i \log(z + (z^2 - 1)^{1/2})$,

(iii) $\tan^{-1} z = -\dfrac{i}{2} \log \dfrac{i - z}{i + z}$.

12. f を実数係数の有理関数とし，z は f の定義域に属する任意の点とする.

(i) $f(z)^* = f(z^*)$ を示せ.

(ii) $t \in \mathbb{R}$ とする．$f(z) = u + iv, z = x + iy$ $(u, v, x, y \in \mathbb{R})$ とするとき

$$\frac{f(z)}{z - z^*} e^{-zt} + \frac{f(z^*)}{z^* - z} e^{-z^* t} = \frac{e^{-xt}}{y}(v \cos ty - u \sin ty)$$

を示せ.

13. 互いに異なる 3 点 $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ を頂点とする 3 角形が正 3 角形であるための必要十分条件は

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 = 0$$

であることを証明せよ.

14. 写像 $w = f(z) = z + \dfrac{1}{z}$ は，円 $|z| = r$ $(r > 0, r \neq 1)$ を w 平面上の楕円に写すことを示せ.

注意：この結果は，問題の写像が円々対応ではないことを示す.

15. a, b, c, d を実定数として，関数 $g(\theta) = a \sin \theta + b \cos \theta + c \sin 2\theta + d \cos 2\theta$ $(\theta \in \mathbb{R})$ を考える．$g(\theta)$ が恒等的に定数であるための必要十分条件は，$a = b = c = d = 0$ であることを示せ.

16. $f(z) = z^2 + 2z$ とする．$r > 0$ を定数とする.

---

[26] 複素変数の**逆 3 角関数**は，実変数の逆 3 角関数の定義で変数を複素数に変えたものとして定義される：$w = \sin^{-1} z \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \sin w = z$，$w = \cos^{-1} z \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \cos w = z$，$w = \tan^{-1} z \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \tan w = z$．いずれも無限多価関数である．ただし，「$A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} B$」は，$A$ を B によって定義することを表す.

(i) 円 $\mathsf{C}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ の f による像 $f(\mathsf{C}_r)$ の点を z の偏角 θ を用いて表せ．

(ii) $f(\mathsf{C}_r)$ は円ではないことを示せ．

注意：(ii) によって，前問と同様，この問題の写像も円々対応ではない．

17. 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，写像 f_A を

$$f_A(z) := \frac{az+b}{cz+d}$$

によって定義する．このとき，任意の2次の行列 A, B に対して

$$f_{AB} = f_A \circ f_B$$

を示せ．ただし，$f_A \circ f_B$ は f_B と f_A の合成写像を表す $((f_A \circ f_B)(z) = f_A(f_B(z)))$．

18. $a \neq 0$ を実数とする．

(i) 複素数 z, w が $|z| = |w|$, $|z-a| = |w-a|$ をみたすならば，$z = w$ または $z = w^*$ であることを示せ．

(ii) 複素数 z, w が $|z| = |w|$, $|z-ia| = |w-ia|$ をみたすならば，$z = w$ または $z = -w^*$ であることを示せ．

19. 複素数 z, w が関係式 $|z| = |w| = 1/\sqrt{2}$, $|z+w| = 1$ をみたすとき，w/z を求めよ．

20. n を任意の自然数とする．

(i)

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{z^n - 1}{z - 1}, \quad z \in \mathbb{C},\ z \neq 1$$

を示せ．なお，$0^0 := 1$ と規約する．

(ii) 任意の複素数 z, α に対して

$$z^n - \alpha^n = (z - \alpha)\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k \alpha^{n-k-1}\right)$$

を示せ．

21．（**因数定理**）$P(z)$ を n 次の多項式とし $(n \in \mathbb{N})$，α を $P(z) = 0$ の解とする．すなわち，$P(\alpha) = 0$．このとき，$(n-1)$ 次の多項式 $Q(z)$ があって $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$ と表されることを証明せよ．

22．$N \in \mathbb{N}$ を任意の自然数，$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とする．

(i)

$$\sum_{n=0}^{N} e^{inx} = \frac{\sin \dfrac{(N+1)x}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}} e^{iNx/2}$$

を示せ．

(ii)

$$\sum_{n=0}^{N} \cos nx = \frac{\sin \dfrac{(N+1)x}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}} \cos \frac{Nx}{2},$$

$$\sum_{n=0}^{N} \sin nx = \frac{\sin \dfrac{(N+1)x}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}} \sin \frac{Nx}{2}$$

を示せ．

注意：これらの有限級数は，物理学への応用においては，たとえば，多重スリットによる光の回折像の解析において現れる．純数学的には，たとえば，フーリエ級数の理論と深い関わりをもつ．

23．任意の複素数 z_1, z_2 に対して

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

を示せ．ただし，$\theta_j = \arg z_j$，$j = 1, 2$．

24. $\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,k_3),\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ に対して，$\boldsymbol{kx}=k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3$ とおく（$\mathbb{R}^3$ のユークリッド内積）．$\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^3$ を固定し，A,B を複素定数とする．$\mathbb{R}^3$ 上の複素数値関数 $\psi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{C}$ を

$$\psi(\boldsymbol{x}):=Ae^{i\boldsymbol{kx}}+Be^{i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{x}},\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$$

によって定義する．このとき

$$|\psi(\boldsymbol{x})|^2=|A|^2+|B|^2+2|A||B|\cos((\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\boldsymbol{x}+a-b)$$

を示せ．ただし，$a,b\in\mathbb{R}$ はそれぞれ，A,B の偏角である．

注意：$\boldsymbol{x}$ の関数 $Ae^{i\boldsymbol{kx}}$ は，波動論において，**波数ベクトル** $\boldsymbol{k}$ の**平面波**とよばれる．この場合，A を**複素振幅**という．上記の関数 ψ は，2つの平面波 $Ae^{i\boldsymbol{kx}},Be^{i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{x}}$ の**重ね合わせ**とよばれる．$|\psi(\boldsymbol{x})|^2$ における $2|A||B|\cos((\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\boldsymbol{x}+a-b)$ は2つの平面波の干渉を表す項である．この構造は量子力学においても重要な役割を演じる．

25. $\mathrm{Im}\,a>0$ とするとき，写像 $f(z)=(z-a)/(z-a^*)$, $z\neq a^*$, $z\in\mathbb{C}$ によって，上半平面はどのような集合に写されるか．

2

複素平面における位相的概念と複素関数の連続性

2.1 はじめに

複素関数は，$\mathbb{C}$ の部分集合（定義域）から $\mathbb{C}$ への写像として定義された（1.6節）．したがって，複素関数の性質を解析にするにあたっては，その定義域となる部分集合の性質を，あらかじめ，よく知っておく必要がある．これが以下の論述の動機づけのひとつである．この準備の後に，複素関数の極限や連続性の概念の定義を行い，連続な複素関数の基本的な性質を証明する．

2.2 有界集合

$\mathbb{C}$ の部分集合 D について，定数 $R > 0$ があって，$|z| \le R,\ z \in D$ が成り立つとき，D は**有界**であるという．容易にわかるように，D が有界であることと D に属する点 z の絶対値 $|z|$ の上限 $\sup_{z\in D}|z|$ が有限であること，すなわち，$\sup_{z\in D}|z| < \infty$，は同値である[1]（なお，問題 1 も参照）．こうして，$\mathbb{C}$ の部分集合は，有界なものと非有界なものとに分類される．

■ **例 2.1** ■　円，開円盤，閉円盤，多角形は有界集合である．他方，$\mathbb{C}$ 全体，実軸，虚軸，上半平面，下半平面，右半平面，左半平面は非有界である．

次の命題は，種々の部分集合の有界性を判定するのに有用である：

---

[1] 実数または正の実無限 ∞（$+\infty$ とも記す）をとりうる数 a について，「$a < \infty$」は，a が有限な実数であることを表す記法である．なお，D 上の実数値関数 $g : D \to \mathbb{R}$; $D \ni z \mapsto g(z) \in \mathbb{R}$ に対して，$\sup_{z\in D} g(z) := \sup\{g(z) \mid z \in D\}$（$g$ の像の上限）．

【命題 2.1】 (i) $\mathbb{C}$ の部分集合 $D_1, \cdots, D_n$（n は任意の自然数）が有界ならば，$\bigcup_{j=1}^n D_j$ も有界である．

(ii) $\mathbb{C}$ の部分集合 D_λ（$\lambda \in \Lambda$; Λ は添字集合）が有界ならば，$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda$ も有界である．

証明　(i) D_j の有界性により，$R_j := \sup_{z \in D_j} |z|$ とおくと，$R_j < \infty$．任意の $z \in \bigcup_{j=1}^n D_j$ に対して，ある j があって，$z \in D_j$．したがって，$|z| \leq R_j$．そこで，$R := \max_{j=1,\cdots,n} R_j$ ($R_1, \cdots, R_n$ のうち最大のもの) とおけば，$\sup_{z \in \bigcup_{j=1}^n D_j} |z| \leq R$．よって，題意が成立する．

(ii) $R_\lambda := \sup_{z \in D_\lambda} |z|$ とおけば，$R_\lambda < \infty$．$z \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda$ とすれば，$|z| \leq R_\lambda$，$\lambda \in \Lambda$．ゆえに，題意が成立する．∎

! 注意 2.1　無限個の有界な部分集合の和集合は有界とは限らない．たとえば，各自然数 n に対して，$D_n := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq n\}$（原点を中心とする，半径 n の閉円盤）とすれば，D_n は有界であるが，$\bigcup_{n=1}^\infty D_n$ は $\mathbb{C}$ に等しく，有界ではない．

2.3　開集合と閉集合

点 $\alpha \in \mathbb{C}$ を中心とする，半径 $r > 0$ の開円盤 $U_r(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| < r\}$（例 1.3）を**点 α の r 近傍**という．この型の集合を総称的に点 α の**近傍**とよぶ．

2 つの複素数 z_1, z_2 について，$|z_1 - z_2| \geq 0$ であり，$|z_1 - z_2| = 0$ と $z_1 = z_2$ は同値であることを思い出そう．したがって，$|z_1 - z_2|$ が小さければ小さいほど，z_1 と z_2 は，より "近い"．ゆえに，点 $\beta \in \mathbb{C}$ が α の r 近傍に属するとき（$|\alpha - \beta| < r$ であるから)，r が小さくなればなるほど，α と β は，より "近い" ということになる．この意味で，近傍は 2 つの複素数どうしの近さを測る概念のひとつを与える．

近傍の概念を用いることにより，$\mathbb{C}$ の部分集合の重要なクラスのひとつを定義することができる：

【定義 2.2】　$\mathbb{C}$ の部分集合 D が**開集合** (open set) であるとは，各 $z \in D$ に対して，ある定数 $\delta > 0$（z に依存しうる）が存在して，$U_\delta(z) \subset D$ が成り立つこと（言葉で言えば，D の任意の点に対して，その近傍で D に含まれるものがあるということ）である．

$\mathbb{C}$ の開集合の全体 $\mathsf{T}_{\mathbb{C}} := \{D \subset \mathbb{C} \mid D \text{ は開集合}\}$ を $\mathbb{C}$ の**位相** (topology) と

よぶ．便宜上，空集合 $\emptyset$ は開集合と考える：$\emptyset \in \mathsf{T}_{\mathbb{C}}$．

■ **例 2.2** ■ $\mathbb{C}$ 全体は開集合である．すなわち，$\mathbb{C} \in \mathsf{T}_{\mathbb{C}}$．

■ **例 2.3** ■ 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ と $r > 0$ に対して，$U_r(\alpha)$ は開集合である．すなわち，$U_r(\alpha) \in \mathsf{T}_{\mathbb{C}}$．

証明 $z \in U_r(\alpha)$ を任意にとる．$|z-\alpha| < r$ であるから，$\delta := r - |z-\alpha|$ とおけば，これは正数である．

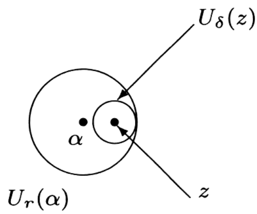


図 2.1 幾何学的描像

任意の $w \in U_\delta(z)$ に対して，3 角不等式により，$|w-\alpha| \leq |w-z| + |z-\alpha| < \delta + |z-\alpha| = r$．したがって，$w \in U_r(\alpha)$．ゆえに，$U_\delta(z) \subset U_r(\alpha)$．よって，題意が成立する． ∎

■ **例 2.4** ■ 中心が α で半径が r の円の外側の部分 $D_r(\alpha) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-\alpha| > r\}$ は開集合である．すなわち，$D_r(\alpha) \in \mathsf{T}_{\mathbb{C}}$．

証明 $z \in D_r(\alpha)$ とし，$\delta = |z-\alpha| - r > 0$ とおく．3 角不等式により，任意の $w \in U_\delta(z)$ に対して，$|w-\alpha| \geq |z-\alpha| - |w-z| > |z-\alpha| - \delta = r$．したがって，$w \in D_r(\alpha)$．ゆえに $U_\delta(z) \subset D_r(\alpha)$．よって題意が成立する． ∎

■ **例 2.5** ■ $\mathbb{C}$ の中の矩形（くけい）（長方形）の内部 $R_{a,b;c,d} := \{z \in \mathbb{C} \mid a < \mathrm{Re}\, z < b,\ c < \mathrm{Im}\, z < d\}$ $(a < b,\ c < d)$ は開集合である．すなわち，$R_{a,b;c,d} \in \mathsf{T}_{\mathbb{C}}$．

証明 $z = x + iy \in R_{a,b;c,d}$ とすれば，$a < x < b$, $c < y < d$．そこで，$\delta < \min\{x-a,\ b-x,\ y-c,\ d-y\}$ とすれば[2]，$U_\delta(z) \subset R_{a,b;c,d}$． ∎

---

[2] 実数 $a_1, \cdots, a_n$ に対して，$\min\{a_1, \cdots, a_n\}$ は $a_1, \cdots, a_n$ のうち最小のものを表す．これを $\min_{j=1,\cdots,n} a_j$ とも表す．

次の命題に述べる開集合に関する性質は基本的である．これは，開集合が "十分たくさん" あることを示すと同時に，与えられた複数の開集合から新たな開集合をつくる方法を与える．

【命題 2.3】

(i) n を任意の自然数とし, $D_1, \cdots, D_n$ を $\mathbb{C}$ の開集合とする．このとき, $\bigcap_{j=1}^{n} D_j$ は $\mathbb{C}$ の開集合である．

(ii) Λ を任意の集合として，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，D_λ は $\mathbb{C}$ の開集合であるとする．このとき，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda$ は $\mathbb{C}$ の開集合である．

証明　(i) $z \in \bigcap_{j=1}^{n} D_j$ とする．したがって，$z \in D_j$, $j = 1, \cdots, n$．仮定により，正数 δ_j が存在して，$U_{\delta_j}(z) \subset D_j$．そこで，$\delta := \min_{j=1,\cdots,n} \delta_j$ とすれば，$U_\delta(z) \subset \bigcap_{j=1}^{n} D_j$．したがって，題意が成立する．

(ii) $z \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda$ とする．したがって，ある $\lambda_0 \in \Lambda$ があって，$z \in D_{\lambda_0}$．ゆえに，正数 $\delta > 0$ があって，$U_\delta(z) \subset D_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda$．よって，題意が成立する．∎

! 注意 2.2　Λ が無限集合の場合，$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda$ は開集合になるとは限らない．

反例：$\alpha \in \mathbb{C}$ として，$n \in \mathbb{N}$ に対して，$D_n = U_{1/n}(\alpha)$ とすれば，$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n = \{\alpha\}$．だが，1 点からなる集合 $\{\alpha\}$ は開集合ではない．

【定義 2.4】　$F \subset \mathbb{C}$ が開集合の補集合であるとき，すなわち，F^c が開集合であるとき，F は**閉集合** (closed set) であるという．

■ **例 2.6** ■　複素平面上の任意の円（円周）は閉集合である．

証明　$\mathsf{C}_r(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| = r\}$（中心が $\alpha \in \mathbb{C}$ で半径が $r > 0$ の円）は $(U_r(\alpha) \cup D_r(\alpha))^c$ であり，$U_r(\alpha) \cup D_r(\alpha)$ は開集合であるから（命題 2.3-(ii) の応用），$\mathsf{C}_r(\alpha)$ は閉集合である．∎

次の命題は，閉集合を特徴づける．

【命題 2.5】

(i) n を任意の自然数とし, $F_1, \cdots, F_n$ を $\mathbb{C}$ の閉集合とする．このとき, $\bigcup_{j=1}^n F_j$ は $\mathbb{C}$ の閉集合である．

(ii) Λ を集合として，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，F_λ は $\mathbb{C}$ の閉集合であるとする．このとき，$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ は $\mathbb{C}$ の閉集合である．

証明 (i) $\left(\bigcup_{j=1}^n F_j\right)^c = \bigcap_{j=1}^n F_j^c$．したがって, 命題 2.3-(i) により, $\left(\bigcup_{j=1}^n F_j\right)^c$ は開集合である．ゆえに題意が成立する．

(ii) $\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda^c$．したがって，命題 2.3-(ii) により，$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\right)^c$ は開集合である．ゆえに題意が成立する． ∎

! 注意 2.3 Λ が無限集合の場合，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ は閉集合になるとは限らない．

反例： $F_n := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1/n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ とすれば，これは閉集合であるが，$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 0\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ は閉集合ではない．

有界な閉集合を**有界閉集合**とよぶ．

命題 2.5 と命題 2.1 から，次の事実がしたがう．

【系 2.6】

(i) n を任意の自然数とし，$F_1, \cdots, F_n$ を $\mathbb{C}$ の有界閉集合とする．このとき，$\bigcup_{j=1}^n F_j$ は $\mathbb{C}$ の有界閉集合である．

(ii) Λ を集合として，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，F_λ は $\mathbb{C}$ の有界閉集合であるとする．このとき，$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ は $\mathbb{C}$ の有界閉集合である．

2.4 点列の収束と極限

実数列の概念は複素数へと拡張される．各自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して，複素数 z_n をただひとつ割り当てる対応 : $n \mapsto z_n$（言い換えれば，$\mathbb{N}$ から $\mathbb{C}$ への写像）を $\mathbb{C}$ の**数列** (sequence)，または**複素数列**とよび，記号的に $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ あるいは $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，または単に $\{z_n\}_n$ と記す．複素数列はまた**複素点列**ともよばれる．

より一般的には，離散的集合 Γ（たとえば，$\Gamma = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \{0\} \cup \mathbb{N}, \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 等）から $\mathbb{C}$ への写像 : $\Gamma \ni \gamma \mapsto z_\gamma \in \Gamma$ を **Γ を添字集合とする複素数列**とよび，$\{z_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ のように表す．

複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ に収束するとは $\lim_{n\to\infty} |z_n - \alpha| = 0$ が成り立つことと定義する．精密に言えば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 $n_0 = n_0(\varepsilon)$（一般には ε による）があって，$n \geq n_0$ ならば $|z_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つということである．この場合

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha \quad \text{または} \quad z_n \to \alpha \ (n \to \infty)$$

と記し，$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を**収束列** (convergent sequence)，α をその**極限** (limit) という．

次の命題は，複素数列の収束性は，その実部と虚部からつくられる 2 つの実数列の収束性と同値であることを語る．

【命題 2.7】 $z_n = x_n + iy_n, \alpha = a + ib$ $(x_n, y_n, a, b \in \mathbb{R})$ とする．このとき，$\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$ であるための必要十分条件は $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ かつ $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ が成り立つことである．

証明　（必要性） $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$ とする．したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ ならば $|z_n - \alpha| < \varepsilon$．$\mathrm{Re}\,(z_n - \alpha) = x_n - a$, $\mathrm{Im}\,(z_n - \alpha) = y_n - b$ であるから，(1.34) によって，$|x_n - a| < \varepsilon$, $|y_n - b| < \varepsilon$, $n \geq n_0$．これは，$\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ を意味する．

（十分性） $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ かつ $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ としよう．(1.35) によって，$|z_n - \alpha| \leq |x_n - a| + |y_n - b|$．したがって，$\lim_{n\to\infty} |z_n - \alpha| = 0$．　∎

複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，定数 $M > 0$ が存在して $|z_n| \leq M$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つとき，$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ は**有界** (bounded) であるという．

【命題 2.8】 収束列は有界である．

証明 $\{z_n\}_n$ を収束列とし，$\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$ とする．このとき，$\{|z_n - \alpha|\}_n$ は収束する実数列であるから，有界である．したがって，定数 $c > 0$ があって，$|z_n - \alpha| \leq c$, $n \in \mathbb{N}$ が成り立つ．ゆえに，3 角不等式により，$|z_n| \leq |z_n - \alpha| + |\alpha|$

$\leq c + |\alpha|$, $n \in \mathbb{N}$. よって，$\{z_n\}_n$ は有界である[3]. ∎

次の事実も基本的である．

【命題 2.9】 $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$, $\lim w_n = \beta$ $(z_n, w_n, \alpha, \beta \in \mathbb{C})$ とする．このとき，次が成立する：

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = |\alpha|, \tag{2.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} (z_n + w_n) = \alpha + \beta, \tag{2.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n w_n = \alpha\beta. \tag{2.3}$$

証明　(2.1) は不等式 $\big||z_n| - |\alpha|\big| \leq |z_n - \alpha|$ による．3 角不等式により，$|(z_n + w_n) - (\alpha + \beta)| \leq |z_n - \alpha| + |w_n - \beta| \to 0$ $(n \to \infty)$．したがって，(2.2) が成立する．3 角不等式により，$|z_n w_n - \alpha\beta| = |(z_n - \alpha)w_n + \alpha(w_n - \beta)| \leq |z_n - \alpha||w_n| + |\alpha||w_n - \beta|$．これと仮定および $\lim_{n\to\infty} |w_n| = |\beta|$ （(2.1) の応用）により，右辺は $n \to \infty$ のとき，0 に収束する． ∎

2.5　完備性と稠密性

1.1 節で触れたように，実数体は完備性という重要な性質をもつ．では，複素数体も完備性を有するであろうか．結論から言えば，答えは肯定的である．だが，それを証明する前に，基本となる概念を定義しなければならない．

$\mathbb{C}$ の点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が条件「任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 n_0 があって，$n, m \geq n_0$ ならば $|z_n - z_m| < \varepsilon$」を満足するとき，$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を**コーシー列** (Cauchy sequence), または**基本列** (fundamental sequence) という[4].

これは，注意するまでもなく，実数のコーシー列の概念を複素数の場合に拡張したものである．実数のコーシー列の場合と同様に，次の事実が成立する：

---

[3] 「収束する実数列は有界である」という事実を使わずに，この事実を証明するのと同じ仕方で，直接証明してもよい．

[4] Augustin Louis Cauchy (1789–1857). フランスの数学者．パリ理工科大学およびパリ大学の教授を歴任．数学と理論物理学に多くの業績を残した．数学では，特に，極限の概念および連続性の概念を厳密化し，現代的な解析学の基礎を築いた．また，本書で見るように，複素関数論において決定的な定理を発見し，この分野に多大の貢献をした．物理学の分野では，理論弾性学の基礎を打ち立てた．

【命題 2.10】 収束する複素数列はコーシー列である．

証明 $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$ としよう $(z_n, \alpha \in \mathbb{C})$．したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ ならば，$|z_n - \alpha| < \varepsilon/2$ が成り立つ．ゆえに，3角不等式により，$|z_n - z_m| \leq |z_n - \alpha| + |\alpha - z_m| < (\varepsilon/2) + (\varepsilon/2) = \varepsilon\,(n, m \geq n_0)$．したがって，$\{z_n\}_n$ はコーシー列である． ■

命題 2.10 の逆も成り立つ：

【定理 2.11】 $\mathbb{C}$ の任意のコーシー列は収束列である．すなわち，$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathbb{C}$ の任意のコーシー列とすれば，複素数 α があって，$\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$ が成り立つ．

証明 仮定により，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 n_0 があって，$n, m \geq n_0$ ならば，$|z_n - z_m| < \varepsilon$ が成り立つ．$z_n = x_n + iy_n$ $(x_n, y_n \in \mathbb{R})$ と書けることに注意しよう．このとき，$|x_n - x_m| \leq |z_n - z_m|$, $|y_n - y_m| \leq |z_n - z_m|$ であるから，$|x_n - x_m| < \varepsilon$, $|y_n - y_m| < \varepsilon$ $(n, m \geq n_0)$．したがって，$\{x_n\}_n, \{y_n\}_n$ はともに実数のコーシー列である．ゆえに，$\mathbb{R}$ の完備性により，$\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b \in \mathbb{R}$ が存在する．そこで，$\alpha := a + ib$ とおけば，$|z_n - \alpha| \leq |x_n - a| + |y_n - b| \to 0$ $(n \to \infty)$．したがって，$\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$． ■

この定理にいう性質を複素数体 $\mathbb{C}$ の**完備性**という．

実数体の完備性の場合と同様，$\mathbb{C}$ の完備性は $\mathbb{C}$ 上の微分積分学 —— 複素解析 —— を展開する上で基礎となる重要な性質である．

複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ $(n_k \in \mathbb{N},\ n_k < n_{k+1})$ という形の数列を $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**部分列**とよぶ．

次の定理も複素解析において重要な役割を演じる．

【定理 2.12】(ボルツァーノ-ヴァイエルシュトラースの定理[5]) 有界な数列は収束する部分列を含む．すなわち，$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を有界な複素数列とすれば，その部分列 $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ で $\lim_{k\to\infty} z_{n_k}$ が存在するものがある．

---

[5] ボルツァーノ (Bernhard Bolzano, 1781–1848) はオーストリアの哲学者，数学者．ヴァイエルシュトラース (Karl Weierstrass, 1815–1897) はドイツの数学者．本書でも見るように，整級数展開による解析接続の理論を創始し，複素解析学の深い展開に貢献した．また，解析学全般の基礎の確立にも重要な寄与をしている．

証明 仮定により, $|z_n| \leq M\,(n \in \mathbb{N})$ をみたす定数 $M > 0$ がある. $z_n = x_n + iy_n$ $(x_n, y_n \in \mathbb{R})$ とすれば, $|x_n| \leq |z_n| \leq M$. 同様に $|y_n| \leq M$. したがって, $\{x_n\}_n$ と $\{y_n\}_n$ はともに有界な実数列である. ゆえに実数列に関するボルツァーノ-ヴァイエルシュトラースの定理によって, $a := \lim_{j\to\infty} x_{m_j}$ が存在する部分列 $\{x_{m_j}\}_j$ がとれる. $\{y_{m_j}\}_j$ も有界な実数列であるから, その部分列 $\{y_{n_k}\}_k$ $(\{n_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \{m_j \mid j \in \mathbb{N}\},\ n_k < n_{k+1})$ で $b := \lim_{k\to\infty} y_{n_k}$ が存在するものがとれる. そこで, $\alpha := a + ib$ とおけば, $|z_{n_k} - \alpha| \leq |x_{n_k} - a| + |y_{n_k} - b| \to 0\ (k \to \infty)$. ゆえに, $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = \alpha$. ∎

実数論で学ぶように, 有理数全体 $\mathbb{Q}$ の濃度は可算無限であり, $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ で稠密(ちゅうみつ)である (1.1 節の脚注 3 を参照). では, $\mathbb{C}$ の中に, $\mathbb{R}$ の中での $\mathbb{Q}$ に相当するような部分集合はあるであろうか. 答えから先に言えば, 然り, である. 次に述べるように, 有理数の "複素版" を考えればよいのである.

実部と虚部がともに有理数である複素数 $z = p + iq\ (p, q \in \mathbb{Q})$ を**複素有理数**という. 複素有理数によって表される点を**複素有理点**, または単に**有理点**とよぶ. 複素有理数の全体を $\mathbb{Q}_\mathbb{C}$ で表す:

$$\mathbb{Q}_\mathbb{C} := \{z = p + iq \mid p, q \in \mathbb{Q}\}. \tag{2.4}$$

【命題 2.13】 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して, 点列 $z_n \in \mathbb{Q}_\mathbb{C}$ で $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ となるものが存在する.

証明 $z = x + iy\,(x, y \in \mathbb{R})$ とすれば, $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{R}$ における稠密性により, 有理数の列 $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n\,(x_n, y_n \in \mathbb{Q})$ で $x_n \to x,\ y_n \to y\,(n \to \infty)$ をみたすものが存在する. そこで, $z_n := x_n + iy_n$ とおけば, $z_n \in \mathbb{Q}_\mathbb{C}$ であり, $z_n \to z\,(n \to \infty)$ が成り立つ. ∎

この命題に述べられた性質を **$\mathbb{Q}_\mathbb{C}$ の $\mathbb{C}$ における稠密性**という.

2.6 閉包および関連する概念

2.6.1 閉　包

複素数体 $\mathbb{C}$ の任意の部分集合に対して, 自然に同伴する部分集合がある. $\mathbb{C}$ の

部分集合 D に対して，D の点からなる収束列の極限となる点の全体，すなわち

$$\bar{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid \lim_{n\to\infty} z_n = z \text{ をみたす } z_n \in D \text{ が存在 }\} \tag{2.5}$$

によって定義される集合 $\bar{D}$ を D の**閉包** (closure) という．任意の $z \in D$ は $z_n = z, n \in \mathbb{N}$ の極限であるから，$z \in \bar{D}$．したがって

$$D \subset \bar{D} \tag{2.6}$$

が成り立つ．

■ **例 2.7** ■　任意の $\rho > 0$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$\overline{U_\rho(\alpha)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| \leq \rho\}.$$

証明　左辺を L，右辺を R とおく．$z \in L$ とすれば，$\lim_{n\to\infty} z_n = z$ となる $z_n \in U_\rho(\alpha)$ がある．$|z_n - \alpha| < \rho$ であるから，両辺の極限をとり，(2.1) を使えば（そこでの z_n を $z_n - \alpha$ として応用する)，$|z - \alpha| \leq \rho$．したがって，$z \in R$．ゆえに $L \subset R$.

逆に $z \in R$ とする．$|z - \alpha| < \rho$ ならば，$z \in L$ である．そこで，$|z - \alpha| = \rho$ をみたす z が L に属することを示せばよい．$z_n = z + (\alpha - z)/n$ とおくと，$|z_n - \alpha| = |z - \alpha|(1 - 1/n) = \rho(1 - 1/n) < \rho$．したがって，$z_n \in U_\rho(\alpha)$．他方，$\lim_{n\to\infty}(\alpha - z)/n = 0$．ゆえに，(2.2) によって，$z_n \to z$ $(n \to \infty)$．よって，$z \in L$. ∎

次の命題は，部分集合 D にその閉包を割り当てる演算 : $D \mapsto \bar{D}$ が，集合の包含関係を保存することを語る：

【命題 2.14】　$D, F \subset \mathbb{C}$，$D \subset F$ ならば，$\bar{D} \subset \bar{F}$.

証明　$z \in \bar{D}$ とすれば，$\lim_{n\to\infty} z_n = z$ となる $z_n \in D$ がある．$z_n \in F$ であるから，$z \in \bar{F}$．ゆえに，$\bar{D} \subset \bar{F}$. ∎

$\bar{D}$ の閉包をとっても新たな集合は得られない：

【命題 2.15】　任意の部分集合 D に対して，$\bar{D}$ の閉包は $\bar{D}$ に等しい：$\bar{\bar{D}} = \bar{D}$.

証明 命題 2.14 により，$\bar{D} \subset \bar{\bar{D}}$ であるから，これと逆の包含関係を示せばよい．そこで，$z \in \bar{\bar{D}}$ とする．このとき，$z_n \to z$ $(n \to \infty)$ となる $z_n \in \bar{D}$ がある．したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ ならば $|z - z_n| < \varepsilon/2 \cdots (*)$ が成り立つ．一方，$\bar{D}$ の定義により，$|z_n - w_n| < \varepsilon/2 \cdots (**)$ となる $w_n \in D$ が存在する．（$\because$ $z_m^{(n)} \to z_n$ $(m \to \infty)$ となる $z_m^{(n)} \in D$ がある．したがって，ある番号 m_0 があって，$m \geq m_0$ ならば，$|z_n - z_m^{(n)}| < \varepsilon/2$．そこで，たとえば，$w_n = z_{m_0}^{(n)}$ とすればよい．）$(*), (**)$ と 3 角不等式により，$|z - w_n| < \varepsilon$, $n \geq n_0$ が得られる．これは，$z \in \bar{D}$ を意味する（演習問題 13 を参照）． ∎

次の事実は，閉集合も“十分たくさん”あることを語る：

【命題 2.16】 任意の $D \subset \mathbb{C}$ に対して，$\bar{D}$ は閉集合である．

証明 $(\bar{D})^c$ が開集合であることを示せばよい．仮に，$(\bar{D})^c$ が開集合でないとすると，ある $z \in (\bar{D})^c$ があって，z の任意の近傍は必ず $\bar{D}$ の点で z と異なるものを含む．したがって，各自然数 n に対して，$U_{1/n}(z) \cap \bar{D}$ に属する点 z_n で $z_n \neq z$ となるものがある．したがって，$|z - z_n| < 1/n$ ．これは，$\lim_{n\to\infty} z_n = z$ を意味する．ゆえに $z \in \bar{\bar{D}} = \bar{D}$（命題 2.15）．だが，これは矛盾である． ∎

次の命題は閉集合の特徴づけを与える：

【命題 2.17】 $D \subset \mathbb{C}$ が閉集合であるための必要十分条件は $\bar{D} = D$ が成り立つことである．

証明 （必要性） D は閉集合であるとする．$D \subset \bar{D}$ はすでに知っているから，逆の包含関係を示せばよい．仮に $\bar{D} \subset D$ が成り立たないとすれば，$z_0 \in \bar{D} \backslash D \subset D^c$ となる点 z_0 が存在する．したがって，$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ となる $z_n \in D$ がある．一方，D^c は開集合であるから，正数 $\delta > 0$ があって，$|z - z_0| < \delta$ ならば，$z \in D^c$．十分大きなすべての n に対して，$|z_n - z_0| < \delta$ となるから，$z_n \in D^c$．だが，これは矛盾である．したがって，$\bar{D} \subset D$ でなければならない．

（十分性） 命題 2.16 より明らか． ∎

与えられた集合が閉集合であることを判定するには，次の系が便利である：

【系 2.18】 D を $\mathbb{C}$ の部分集合とする．D の任意の収束列の極限が D に属するならば, D は閉集合である．すなわち, D の任意の収束列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(z_n \in D, n \in \mathbb{N})$ に対して，$\lim_{n\to\infty} z_n \in D$ ならば，D は閉集合である．

証明　任意の $z \in \bar{D}$ に対して，$\lim_{n\to\infty} z_n = z$ となる点列 $z_n \in D$ がある．このとき，仮定により，$z \in D$．したがって，$\bar{D} \subset D$．ゆえに，$\bar{D} = D$．よって，命題 2.17 によって，D は閉集合である． ∎

2.6.2　境　界

円盤や矩形内部のような単純な図形の場合には，その境界は描像的には自明である．しかし，通常の感覚的描像を超えるような一般の図形の境界の概念は決して自明ではない．だが, 閉包の概念を用いることにより，任意の図形に対して，その境界の概念を明晰に定義することが可能となる：

$\mathbb{C}$ の部分集合 D から定まる集合

$$\partial D := \bar{D} \cap \overline{D^c} \tag{2.7}$$

── D の閉包と D の補集合 D^c の閉包の共通部分 ── を D の**境界** (boundary) という．したがって，これは D^c の境界でもある．

【命題 2.19】　任意の部分集合 $D \subset \mathbb{C}$ に対して，∂D は閉集合である．

証明　命題 2.16 によって, $\bar{D}$ および $\overline{D^c}$ はともに閉集合である．これと命題 2.5-(ii) によって，∂D は閉集合である． ∎

境界に関する次の事実は基本的である．

【命題 2.20】

(i) D が開集合ならば，$\partial D = \bar{D} \setminus D$.

(ii) D が閉集合ならば，$\partial D = \overline{D^c} \setminus D^c$.

証明　(i) D を開集合とする．このとき，D^c は閉集合であるから, $\partial D = \bar{D} \cap D^c$. 一方，$\bar{D} \setminus D = \bar{D} \cap D^c$．したがって，$\partial D = \bar{D} \setminus D$.

(ii) D が閉集合ならば，D^c は開集合であるから，(i) によって，$\partial D^c = \overline{D^c} \setminus D^c$. $\partial D^c = \partial D$ であったから，題意がしたがう． ∎

■ **例 2.8** ■ 開円盤 $U_\rho(\alpha)$ の境界は，円 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-\alpha| = \rho\}$ である．（命題 2.20-(i) を応用せよ．）

■ **例 2.9** ■ 上半平面 $\Pi_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ の境界は実軸全体 $\mathbb{R}$ である．（∵ $\overline{\Pi_+} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$ を示し，命題 2.20-(i) を応用せよ．）

2.6.3 集積点と孤立点

D を $\mathbb{C}$ の部分集合とする．点 $\alpha \in \mathbb{C}$ が（α は D に属していてもいなくてもよい），$D \setminus \{\alpha\}$ の点列の極限値になっているとき，α を D の**集積点** (accumulation point) という．この場合，$\alpha \in \bar{D}$.

他方，点 α が D の点であって，D の集積点ではないとき，α を D の**孤立点** (isolated point) という．

2.7 有界閉集合の性質 — コンパクト性

複素関数の理論を数学的に厳密に展開する上での基礎となる重要な事実のひとつを述べておく．それは，この章の第 3 節で登場した有界閉集合に関するものである．まず，ある一般概念を導入する．

$\mathbb{C}$ の部分集合 D に対して，開集合の族 $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$（$\Lambda$ は添字集合）があって，$D \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ が成り立つとき — このことを「D は開集合の族 $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ によって覆われる」という —，$\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を D の**開被覆** (open covering) という．Λ が有限集合のときは，$\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を D の**有限開被覆**とよぶ．

【定義 2.21】 $\mathbb{C}$ の部分集合 D について，D の任意の開被覆 $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して，必ず，その中から有限個の開集合 $O_{\lambda_1}, \cdots, O_{\lambda_n}$ を選んで，$D \subset \bigcup_{j=1}^{n} O_{\lambda_j}$ とできるとき，D は**コンパクト**であるという．

この定義のポイントは，D のどんな開被覆からも，D の有限開被覆が取り出せるということにある．これは相当強い条件であることを注意しておく．（したがって，コンパクト集合に関わる数学的事象については，かなり強力な結果が導

かれる.)

■ **例 2.10** ■　部分集合 $D \subset \mathbb{C}$ の各点 z に対して，1 つの正数 $\delta_z > 0$ を割り当て，z の δ_z 近傍 $U_{\delta_z}(z)$ を考える．このとき，明らかに，$D \subset \bigcup_{z\in D} U_{\delta_z}(z)$．各 $U_{\delta_z}(z)$ は開集合であるから，$\{U_{\delta_z}(z)\}_{z\in D}$ は D の開被覆である．

次の定理は，複素解析学の深い展開のための基礎となる重要な定理のひとつである：

【定理 2.22】　$\mathbb{C}$ の部分集合 D がコンパクトであるための必要十分条件は，それが有界閉集合であることである．

証明　(必要性)　対偶を証明する．そこで，D が有界閉集合でないとする．この場合，次の 2 つの場合が考えられる：(i) D は有界でない；(ii) D は閉集合でない．(i) の場合，D の各点 z に対して，半径 1 の近傍 $U_1(z) = \{z' \in \mathbb{C} \mid |z - z'| < 1\}$ を割り当ててみよう．明らかに，$\{U_1(z)\}_{z\in D}$ は D の開被覆である．しかし，任意の $n \in \mathbb{N}$ と $z_1, \cdots, z_n \in D$ に対して $\bigcup_{j=1}^{n} U_{z_j}(1)$ は有界集合であるから，これらで D を覆うことはできない．したがって，D はコンパクトではない．次に (ii) の場合であるが，D は閉集合ではないから，命題 2.17 によって，点 $z_0 \in \bar{D} \setminus D$ が存在する．そこで，D の各点 z に対して，半径が $|z - z_0|/2$ の近傍 $U_{|z-z_0|/2}(z)$ を割り当てると，$\{U_{|z-z_0|/2}(z)\}_{z\in D}$ は D の開被覆である．だが，任意の $m \in \mathbb{N}$ と $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in D$ に対して，$D \not\subset \bigcup_{j=1}^{m} U_{|\alpha_j - z_0|/2}(\alpha_j)$．($\because$ $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ となる $z_n \in D$ がある．$\delta := \min_{j=1,\cdots,m} |\alpha_j - z_0|/2$ とすれば，任意の $0 < \varepsilon < \delta$ に対して，番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ ならば $|z_n - z_0| < \varepsilon$．したがって，$n \geq n_0$ ならば，任意の $j = 1, \cdots, m$ に対して，3 角不等式により，$|\alpha_j - z_n| \geq |\alpha_j - z_0| - |z_0 - z_n| > |\alpha_j - z_0|/2$．これは，$z_n \notin \bigcup_{j=1}^{m} U_{|\alpha_j - z_0|/2}(\alpha_j), n \geq n_0$ を意味する．) ゆえに，D はコンパクトではない．

(十分性)　D は有界閉集合であるとし，$\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を D の任意の開被覆とする．2 つの場合に分けて考察する．

(i) D が閉矩形集合 $\{z = x + iy \mid x \in [a,b],\ y \in [c,d]\}$ の場合．D がコンパクトでないとして矛盾を出す．D の各辺を 2 等分すると 4 個の閉矩形集合ができる．D はコンパクトでないから，これら 4 個の閉矩形集合のうちの少なくとも 1 つはコ

ンパクトでない．その 1 つを D_1 とする．同様に, D_1 の各辺を 2 等分して 4 個の閉矩形集合をつくると，そのうちの少なくとも 1 つはコンパクトでない．これを D_2 とする．以下，同様にして，コンパクトでない閉矩形集合の列 $D_1, D_2, \cdots, D_n, \cdots$ で $D_1 \supset D_2 \supset \cdots \supset D_n \supset D_{n+1} \supset \cdots$ をみたし，かつ閉矩形集合 D_n の 2 辺の長さはそれぞれ，$(b-a)/2^n$, $(d-c)/2^n$ であるものがとれる．したがって，$D_n = \{z = x + iy \mid a_n \le x \le b_n,\ c_n \le y \le d_n\}$ とすれば，$a \le a_n < b_n \le b,\ c \le c_n < d_n \le d$ かつ $b_n - a_n = (b-a)/2^n$, $d_n - c_n = (d-c)/2^n$．ゆえに，$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, $\lim_{n\to\infty}(d_n - c_n) = 0$．これは，区間縮小法により，$x_0 := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$, $y_0 := \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} d_n$ の存在および $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \{z_0\}$ $(z_0 := x_0 + iy_0)$ を意味する．D は閉集合であるから，命題 2.17 によって，$z_0 \in D$．z_0 を含む開集合の 1 つを O_{λ_0} とすれば，十分大きな n に対しては，$D_n \subset O_{\lambda_0}$ となる．だが，これは D_n の非コンパクト性に反する．ゆえに矛盾が生じる．

(ii) D が一般の有界閉集合の場合．この場合, D の有界性により, $D \subset K$ となる閉矩形集合 K がとれる．このとき，$\{O_\lambda, D^c | \lambda \in \Lambda\}$ は K の開被覆である．したがって, (i) によって, 番号 n_0 と $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n_0} \in \Lambda$ があって, $K \subset \left(\bigcup_{j=1}^{n_0} O_{\lambda_j}\right) \cup D^c$ が成り立つ．そこで，$D = D \cap K$ と $D \cap D^c = \emptyset$ を用いると，$D \subset \bigcup_{j=1}^{n_0} O_{\lambda_j}$ が得られる．ゆえに D はコンパクトである． ∎

2.8 曲線と領域

2.8.1 定義と基本的事実

第 1 章の 1.5 節の例 1.4 で複素平面での曲線の方程式にふれたが，ここで改めて複素平面における曲線の概念を一般的に定義しておく．

J を $\mathbb{R}$ の部分集合とするとき, J から $\mathbb{C}$ への写像 $f : J \to \mathbb{C}$; $J \ni t \mapsto f(t) \in \mathbb{C}$ を **J 上の複素数値関数**という．

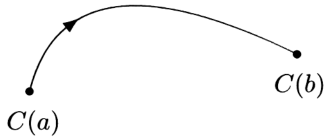
【定義 2.23】 $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ を $\mathbb{R}$ の閉区間とし，C を $[a, b]$ 上の複素数値関数とする[6)]．

(i) 写像 C が点 $t_0 \in [a, b]$ で**連続** (continuous) であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し

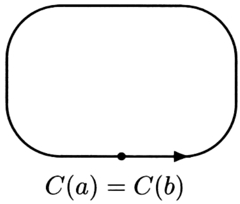
[6)] 上の定義で $J = [a, b]$ の場合．

て定数 $\delta > 0$ が存在して，$|t-t_0| < \delta,\, t \in [a,b]$ ならば $|C(t)-C(t_0)| < \varepsilon$ が成り立つときをいう[7]．このことをしばしば，簡略的に $\lim_{t\to t_0} C(t) = C(t_0)$ と表す．

(ii) 写像 C が $[a,b]$ のすべての点で連続のとき，C は $[a,b]$ 上で**連続**であるという．この場合，C を $\mathbb{C}$ における**曲線** (curve) という．点 $C(a), C(b)$ をそれぞれ，曲線 C の**始点**，**終点**という．t を**曲線 C のパラメータ**という．



曲線



閉曲線

(iii) $C(a) = C(b)$ となる曲線，すなわち，始点と終点が一致する曲線を**閉曲線** (closed curve) という．

(iv) $c_0 = a,\ c_n = b,\ c_1, \cdots, c_{n-1} \in (a,b)\ (c_1 < \cdots < c_{n-1})$ とし，各 $i = 1, \cdots, n$ に対して，曲線 $C_i : [c_{i-1}, c_i] \to \mathbb{C}$ が与えられたとする．ただし，$C_i(c_i) = C_{i+1}(c_i),\ i = 1, \cdots, n-1$ とする．このとき，曲線 $C : [a,b] \to \mathbb{C}$ が

$$C(t) := \begin{cases} C_1(t) & ;\ t \in [c_0, c_1] \\ C_2(t) & ;\ t \in [c_1, c_2] \\ \quad\vdots & \quad\ \vdots \\ C_n(t) & ;\ t \in [c_{n-1}, c_n] \end{cases}$$

によって定まる．この曲線 C を $C_1, \cdots, C_n$ の**和**とよび，

$$C = C_1 \cdot C_2 \cdot\ \cdots\ \cdot C_{n-1} \cdot C_n$$

と書く．

---

[7] $[a, b]$ 上の実数値関数の連続性の概念を複素数値関数の場合に拡張したものである．

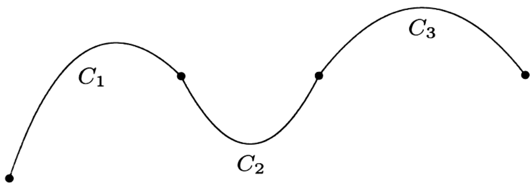


図 2.2 $C = C_1 \cdot C_2 \cdot C_3$ ($n = 3$ の場合)

ここで定義した曲線の概念は，$\mathbb{C}$ の 1 次元的部分集合のことではなく，$\mathbb{R}$ の閉区間から $\mathbb{C}$ への写像のことである．他方，日常的な言葉の使い方では，「曲線」によって，描像的には C の像（値域）

$$\mathsf{R}(C) := C([a,b]) = \{C(t) \mid t \in [a,b]\} \tag{2.8}$$

── これは $\mathbb{C}$ の 1 次元的部分集合 ── を指す場合が多い[8]．この点は，言葉の使い方に注意されたい．しかし，誤解のおそれのない場合，曲線の像も単に曲線という場合がある（多くの場合，文脈によって適切に判断されうる）．本書では，曲線の像をしばしば**曲線図形**とよぶ．

$C : [a,b] \to \mathbb{C}$ を曲線とし，$X(t) := \mathrm{Re}\, C(t)$, $Y(t) := \mathrm{Im}\, C(t)$ すれば，

$$C(t) = X(t) + iY(t), \quad t \in [a,b] \tag{2.9}$$

と書ける．このとき，対応 $X : t \mapsto X(t); t \mapsto Y(t)$ は $[a,b]$ 上の連続関数になる．($\because$ $|X(t) - X(t_0)| \le |C(t) - C(t_0)|$, $|Y(t) - Y(t_0)| \le |C(t) - C(t_0)|$ に注意.) したがって，$x = X(t)$, $y = Y(t)$ は，複素平面での曲線の方程式 $z = C(t)$ に対応する，$\mathbb{R}^2$ での曲線の方程式を与える．

逆に，X, Y を $[a,b]$ 上の実数値連続関数とし，$C : [a,b] \to \mathbb{C}$ を (2.9) によって定義すれば，C は $\mathbb{C}$ における曲線である．

$C : [a,b] \to \mathbb{C}$ を曲線とする．全単射な連続写像 $h : [c,d] \to [a,b]$ ($c, d \in \mathbb{R}, c < d$) をとり，合成写像 $C_h := C \circ h$ を考える ($C_h(s) = C(h(s))$, $s \in [c,d]$)．このとき，次の 2 つの場合がありうる：(i) $h(c) = a, h(d) = b$ かつ h は狭義単調増加; (ii) $h(c) = b, h(d) = a$ かつ h は狭義単調減少（証明は中間値の定理の応用

[8] $\mathsf{R}(C)$ の「R」は値域 (range) の意．曲線 C の像を $\mathrm{Im}(C)$ という記号で表す文献もあるが (「Im」は像 (image) の意)，虚部を表す「Im」との混乱を避けるため，本書では，この記号は使わない．

による)．いずれの場合でも，C の像と C_h の像は等しい（したがって，C と C_h は同じ曲線図形を与える)．(i) の場合，C と C_h は**同じ向きをもつ**といい，C と C_h は**同値である** (equivalent) という．

一般に，2つの曲線 $C_1:[a,b]\to\mathbb{C}$; $C_2:[c,d]\to\mathbb{C}$ について，(i) をみたす連続写像 $h:[c,d]\to[a,b]$ があって，$C_2=C_1\circ h$ が成り立つとき，C_1 と C_2 は**同値**であるという．この場合，逆写像 $h^{-1}:[a,b]\to[c,d]$ は連続かつ狭義単調増加であり，$h^{-1}(a)=c$, $h^{-1}(b)=d$ をみたし，$C_1=C_2\circ h^{-1}$ が成り立つ．したがって，いまの定義は，C_1 と C_2 について対称的であるので，意味をもつ．

他方，(ii) の場合は，C と C_h は**逆の向き**をもつという（C_h は C と**逆向き**であるともいう)．一般に，C と逆向きの曲線を $-C$ で表す．これは，描像的に言えば，C の像を "逆向きに辿る" 曲線，すなわち，像は同じだが，始点が $C(b)$ で終点が $C(a)$ の曲線である．

たとえば，$C^-(t):=C(a+b-t), t\in[a,b]$ によって定義される曲線 C^- は C と逆向きの曲線である（h が $h_-:[a,b]\to[a,b]$, $h_-(t):=a+b-t$ の場合)．C^- は，C と逆向きの曲線のどれとも同値である．実際，C_h をそのような曲線とし，$g:=h_-^{-1}\circ h:[c,d]\to[a,b]$ とすれば，$C^-\circ g=C_h$ であり，$g(c)=a$, $g(d)=b$ かつ g は狭義単調増加であるから，C^- と C_h は同値である．

■ **例 2.11** ■　$z_1,z_2\in\mathbb{C}, z_1\neq z_2$ として写像 $L:[0,1]\to\mathbb{C}$ を

$$L(t)=(1-t)z_1+tz_2,\quad t\in[0,1]$$

によって定義する．これは，z_1 を始点とし，z_2 を終点とする曲線である．曲線 L の像は，幾何学的には，z_1 と z_2 を結ぶ線分を表す．そこで，曲線 $L(t)$ を，**z_1 を始点，z_2 を終点とする直線**とよぶ．このような直線を総称的に**有限直線**とよぶことにする．

有限直線の有限個の和になっている曲線を**折れ線曲線**とよぶ．言うまでもなく，この曲線の像は，折れ線になっている[9]．

■ **例 2.12** ■　$\alpha\in\mathbb{C}, R>0$ として写像 $C:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ を

$$C(t)=\alpha+R\cos t+iR\sin t=\alpha+Re^{it},\quad t\in[0,2\pi]$$

によって定義する．これは閉曲線である．この曲線の像は，幾何学的には，中心が α で半径が R の円を表す（例 1.3)．

[9] 折れ線曲線も単に折れ線とよぶ場合もある．文脈で判断すれば混乱のおそれはないであろう．

$J \subset \mathbb{R}$ 上の複素数値関数 $f : J \to \mathbb{C}$ について，定数 $M > 0$ があって，$|f(t)| \leq M, t \in J$ が成り立つとき，f は J 上で**有界**であるという．

次の事実は基本的である．

【命題 2.24】 曲線 $C : [a,b] \to \mathbb{C}$ は有界であり，その像 $C([a,b])$ は有界閉集合である．

証明 $C(t) = X(t) + iY(t)$ $(X(t) = \operatorname{Re} C(t), Y(t) = \operatorname{Im} C(t))$ とおくと，X, Y は $[a,b]$ 上の連続関数である．したがって，関数 $|X(t)|, |Y(t)|$ は $[a,b]$ 上で最大値をもつ[10]．したがって，$M_X := \max_{t\in[a,b]} |X(t)|$ ($|X(t)|$ の $[a,b]$ での最大値)，$M_Y := \max_{t\in[a,b]} |Y(t)|$ とおけば，$|C(t)| \leq M_X + M_Y, t \in [a,b]$．ゆえに，$C$ は有界である．したがって，その像も有界である．

$C([a,b])$ の閉性（閉集合であること）を示すために，$C([a,b])$ の中の任意の収束列 $\{z_n\}_n$ $(z_n \in C([a,b]))$ をとり，$\lim_{n\to\infty} z_n = z$ とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ ならば $|z_n - z| < \varepsilon$．一方，$z_n = C(t_n)$ となる $t_n \in [a,b]$ がある．$\{t_n\}_n$ は有界数列であるから，ボルツァーノ-ヴァイエルシュトラースの定理（定理 2.12）により，部分列 t_{n_k} で収束するものが存在する．$t_0 := \lim_{k\to\infty} t_{n_k}$ とすれば，$t_0 \in [a,b]$ であり，C の連続性により，$C(t_{n_k}) \to C(t_0)$ $(k \to \infty)$．したがって，$|C(t_0) - z| \leq \varepsilon$．$\varepsilon > 0$ は任意であったから，$z = C(t_0)$．ゆえに，$z \in C([a,b])$．よって，命題 2.18 によって，$C([a,b])$ は閉集合である． ∎

【命題 2.25】 $C : [a,b] \to \mathbb{C}$ を曲線とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta = \delta_\varepsilon$（$\varepsilon$ に依存しうる定数）があって，$|t - s| < \delta$ $(t, s \in [a,b])$ ならば，$|C(t) - C(s)| < \varepsilon$ が成り立つ．

証明 前命題の証明と同様に，$C(t) = X(t) + iY(t)$ とすれば，X, Y は $[a,b]$ 上の実数値連続関数である．したがって，それらは $[a,b]$ 上で一様連続である（微分積分の本を参照）．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta = \delta_\varepsilon$（$\varepsilon$ に依存しうる定数）があって，$|t - s| < \delta$ $(t, s \in [a,b])$ ならば，$|X(t) - X(s)| < \varepsilon/2$，$|Y(t) - Y(s)| < \varepsilon/2$ が成り立つ．したがって，$|t - s| < \delta$ $(t, s \in [a,b])$ ならば，

[10] 微分積分学の本を参照．

$$|C(t) - C(s)| \leq |X(t) - X(s)| + |Y(t) - Y(s)| < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

命題 2.25 にいう性質を曲線 $C : [a, b] \to \mathbb{C}$ の**一様連続性**という．この性質のポイントは，δ が ε だけによって，$t, s \in [a, b]$ によらないというところにある（単なる連続性との違いに注意）．

2.8.2　連続微分可能な曲線

曲線 $C : [a, b] \to \mathbb{C}$ と $t_0 \in [a, b]$ について極限

$$\lim_{t \to t_0} \frac{C(t) - C(t_0)}{t - t_0}$$

が存在するとき，曲線 C は t_0 **で微分可能**であるいい，この極限を $C'(t_0)$ で表す．$C'(t_0)$ を t_0 での C の**微分係数**という．複素数 $C'(t_0)$ に付随する 2 次元ベクトルは幾何学的には曲線 C 上の点 $C(t_0)$ での接ベクトルを表す．この意味で $C'(t_0)$ を点 $C(t_0)$ における C の**接ベクトル**という（図 2.3）．

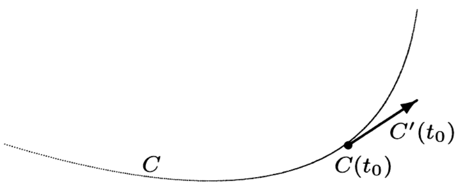


図 2.3　点 $C(t_0)$ での接ベクトル $C'(t_0)$

曲線 $C : [a, b] \to \mathbb{C}$ がすべての $t \in [a, b]$ に対して微分可能であるとき，C は $[a, b]$ **上で微分可能**であるという．この場合，対応 : $[a, b] \ni t \mapsto C'(t) \in \mathbb{C}$ によって，$[a, b]$ 上の複素数値関数 C' が定義される．これを C の**導関数**とよぶ．C' が $[a, b]$ 上で連続であるとき，C は $[a, b]$ 上で**連続微分可能**であるという．$C'(t)$ を $\dot{C}(t)$ または $dC(t)/dt$ という記号で表す場合もある：

$$C'(t) = \dot{C}(t) = \frac{dC(t)}{dt} = \lim_{t' \to t} \frac{C(t') - C(t)}{t' - t}. \tag{2.10}$$

曲線 $C : [a, b] \to \mathbb{C}$ が微分可能であれば，容易にわかるように（命題 2.7 の応用），関数 $X(t) = \operatorname{Re} C(t)$ および $Y(t) = \operatorname{Im} C(t)$ も微分可能であり

$$C'(t) = X'(t) + iY'(t), \quad t \in [a, b] \tag{2.11}$$

が成り立つ.

【命題 2.26】 連続微分可能な曲線 $C : [a, b] \to \mathbb{C}$ が $C'(t) = 0, t \in [a, b]$ をみたすならば, C は定数である. すなわち, ある定数 $c \in \mathbb{C}$ があって, $C(t) = c,\ t \in [a, b]$.

証明 仮定と (2.11) により, $X'(t) = 0, Y'(t) = 0,\ t \in [a, b]$. したがって, 定数 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ があって, $X(t) = c_1, Y(t) = c_2,\ t \in [a, b]$. そこで, $c = c_1 + ic_2$ とすれば, $C(t) = c,\ t \in [a, b]$. ∎

2.8.1 項で曲線の同値性の概念を定義した. だが, 連続微分可能な曲線については, 同値性の概念の定義を若干変える必要がある. 曲線 $C : [a, b] \to \mathbb{C}$; $C_1 : [c, d] \to \mathbb{C}$ を連続微分可能な曲線とする. 連続微分可能な写像 $h : [c, d] \to [a, b]$ で $h(c) = a,\ h(d) = b,\ h'(s) > 0,\ s \in [c, d]$ をみたすものがあって, $C_1 = C \circ h$ が成り立つとき, C と C_1 は**同値**であるという. この場合, 逆関数定理により, 逆写像 $h^{-1} : [a, b] \to [c, d]$ も連続微分可能であり, $h^{-1}(a) = c,\ h^{-1}(b) = d, (h^{-1})'(t) > 0,\ t \in [a, b]$ および $C_1 = C \circ h^{-1}$ が成り立つ. したがって, いまの定義は, C と C_1 について対称的であるので, 意味をもつ.

$g : [a, b] \to [a, b]$ が連続微分可能な写像で $g(a) = b,\ g(b) = a,\ g'(t) < 0,\ t \in [a, b]$ をみたすとき, $C \circ g$ を ***C* と逆向きの連続微分可能な曲線**とよぶ.

2.8.3 曲線の長さ

$C : [a, b] \to \mathbb{C}$ を連続微分可能な曲線とする.

【補題 2.27】 各 $t \in [a, b]$ に対して, $\lim_{\delta \in \mathbb{R}, \delta \to 0} o(t, \delta)/\delta = 0$ をみたす複素数 $o(t, \delta)$ があって

$$C(t + \delta) - C(t) = C'(t)\delta + o(t, \delta), \quad t + \delta, t \in [a, b] \tag{2.12}$$

と表される.

証明 $E(t, \delta) := [C(t + \delta) - C(t)]/\delta - C'(t)$ とおくと, $\lim_{\delta \to 0} E(t, \delta) = 0$. そこで, $o(t, \delta) = E(t, \delta)\delta$ とおけば題意がしたがう. ∎

区間 $[a, b]$ を, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ というふうに n 個の区間に分割する.

ただし, $\max_{j=1,\cdots,n}|t_j - t_{j-1}| \to 0\ (n \to \infty)$ となるように分割する．このとき, n が十分大きければ, C 上の点 $C(t_0), C(t_1), \cdots, C(t_n)$ を順次線分で結んでできる折れ線の長さは $L_n := \sum_{j=1}^{n} |C(t_j) - C(t_{j-1})|$ で与えられる．もし, C が $[a,b]$ の中の有限個の点を除いて単射であるとすれば, L_n は, 幾何学的には, C の像 $C([a,b])$ の長さの近似値になっているであろうことが推測される（有限個の点の長さは 0)．補題 2.27 によって, $|C(t_j) - C(t_{j-1})| \approx |C'(t_{j-1})|(t_j - t_{j-1})\ (|t_j - t_{j-1}| \to 0)$ であるから[11)], $L_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b |C'(t)|dt$（非負値関数 $|C'(t)|$ のリーマン積分）が予想される．この幾何学的描像に基づいて，改めて，次の定義を設ける：

$$L(C) := \int_a^b |C'(t)|dt \tag{2.13}$$

を**曲線 C の長さ**とよぶ[12)]．

$C(t) = X(t) + iY(t)$ ならば，(2.11) によって

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{X'(t)^2 + Y'(t)^2}\, dt \tag{2.14}$$

が成り立つ．

$L(C)$ の定義においては，C は単射であってもなくてもよいことに注意しよう．だが，そのかわり，C が単射でない場合には，$L(C)$ と C の像 $C([a,b])$ の長さは必ずしも一致するとは限らないことに留意する必要がある（次の例を参照)．非負の数 $L(C)$ は，写像としての曲線に付随する 1 つのスカラー量であって，C が有限個の点を除いて単射の場合には，その像 $\mathsf{R}(C)$ の長さを定義する量であると解釈されるものである．

■ **例 2.13** ■　$R > 0$ を定数として，曲線 $C_n(t) = Re^{it} = R\cos t + iR\sin t, t \in [0, 2n\pi]$ を考える．これは明らかに連続微分可能であり，$C_n'(t) = Rie^{it}$．したがって，$L(C_n) = \int_0^{2\pi n} R\,dt = 2\pi nR$．$C_n$ の像はいずれも原点を中心とする半径 R の円 $\mathsf{C}_R(0)$ であるが，n が異なれば，$L(C_n)$ も異なる．$\mathsf{C}_R(0)$ の長さに等しいのは $L(C_1)$ であり，C_1 は $[0, 2\pi)$ で単射である．$n \geq 2$ ならば，C_n は，有限個の点を除いても，単射ではない．

【命題 2.28】　$h : [c,d] \to [a,b]$ は連続微分可能で全単射であるとする．このとき，$L(C) = L(C \circ h)$．

---

11) 「$A \approx B\ (P)$」は，条件 P のもとで，B が A の近似であることを表す記号．

12) 連続微分可能でない曲線の長さも定義できるが，それについては省略する．

証明 合成関数の微分法により，$(C \circ h)'(s) = h'(s)C'(h(s))$．したがって，$L(C \circ h) = \int_c^d |C'(h(s))||h'(s)|ds$．仮定により，$h'(s) \geq 0$, $s \in [a,b]$，または $h'(s) \leq 0$, $s \in [a,b]$．いずれの場合も，変数変換 $t = h(s)$ により，$\int_c^d |C'(h(s))||h'(s)|ds = \int_a^b |C'(t)|dt = L(C)$ となる． ∎

この命題は，特に，**同値な連続微分可能な曲線の長さは相等しい**ことを示している．

曲線 C が有限個の連続微分可能な曲線 $C_1, \cdots, C_n$ の和 $C = C_1 \cdot C_2 \cdots \cdot C_{n-1} \cdot C_n$（2.8.1 項を参照）として表されるとき，$C$ は**区分的に連続微分可能**であるという．この場合，C の長さ $L(C)$ は

$$L(C) := \sum_{j=1}^{n} L(C_j) \tag{2.15}$$

によって定義される．

2.8.4 曲線の積分

曲線 C の積分 $\int_a^b C(t)dt$ を ── $X(t) = \mathrm{Re}\, C(T)$, $Y(t) = \mathrm{Im}\, C(t)$ として ──

$$\int_a^b C(t)dt := \int_a^b X(t)dt + i\int_a^b Y(t)dt \tag{2.16}$$

によって定義する．ただし，$\int_a^b X(t)dt$ は実数値関数 $X : [a,b] \to \mathbb{R}$ の $[a,b]$ におけるリーマン積分を表す（$\int_a^b Y(t)dt$ についても同じ）．

■ **例 2.14** ■ λ を実数として，曲線 $C(t) = e^{i\lambda t}$, $t \in [a,b]$ を考えると，
$\lambda \neq 0$ のとき

$$\int_a^b e^{i\lambda t}dt = \int_a^b \cos\lambda t\, dt + i\int_a^b \sin\lambda t\, dt$$
$$= \frac{1}{\lambda}[\sin\lambda b - \sin\lambda a + i(-\cos\lambda b + \cos\lambda a)].$$

したがって

$$\int_a^b e^{i\lambda t}dt = \frac{e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}}{i\lambda}, \quad \lambda \neq 0. \tag{2.17}$$

$\lambda = 0$ ならば，$e^{i\lambda t} = e^{i0} = 1$ であるから，$\int_a^b e^{i\lambda t}dt = b - a$ である．

これから，特に，任意の整数 n に対して

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}dx = 2\pi\delta_{n0} \tag{2.18}$$

が導かれる[13]．これらの積分公式は，数学のいろいろなところで使われる基礎的な式である．

次の事実は基本的である．

【命題 2.29】 $C : [a,b] \to \mathbb{C}$ を曲線とする．このとき

$$\left|\int_a^b C(t)dt\right| \leq \int_a^b |C(t)|dt. \tag{2.19}$$

証明　$[a,b]$ を $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ と分割する．ただし，$\max_{j=1,\cdots,n} |t_j - t_{j-1}| \to 0\,(n \to \infty)$ とする．分割を無限に細かくする極限を $\lim_n$ で表す．このとき，(2.16) とリーマン積分の定義により

$$\begin{aligned}\int_a^b C(t)dt &= \lim_n \sum_{j=1}^n X(t_j)(t_j - t_{j-1}) + i\lim_n \sum_{j=1}^n Y(t_j)(t_j - t_{j-1}) \\ &= \lim_n \sum_{j=1}^n C(t_j)(t_j - t_{j-1}).\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b C(t)dt\right| &= \lim_n \left|\sum_{j=1}^n C(t_j)(t_j - t_{j-1})\right| \\ &\leq \lim_n \sum_{j=1}^n |C(t_j)|(t_j - t_{j-1}) \\ &= \int_a^b |C(t)|dt.\end{aligned}$$

ゆえに (2.19) が成立する．　■

---

[13] 2つの対象 A, B に対して，δ_{AB} はクロネッカーのデルタを表す：$A = B$ ならば $\delta_{AB} = 1$；$A \neq B$ ならば $\delta_{AB} = 0$．δ_{AB} を $\delta_{A,B}$ と記す場合もある．したがって，整数 n に関して，$n = 0$ ならば，$\delta_{n0} = 1$；$n \neq 0$ ならば $\delta_{n0} = 0$．

2.8.5 領　域

【定義 2.30】 D を $\mathbb{C}$ の部分集合とする．

(i) D の中に像をもつ曲線を **D 内の曲線**とよぶ．

(ii) D の任意の 2 点 $z_1, z_2 \in D$ に対して，z_1, z_2 が D 内の曲線で結ばれるとき，すなわち，D の中に像をもつ曲線 $C : [a, b] \to D$ で，$C(a) = z_1, C(b) = z_2$ をみたすものが存在するとき，D は**弧状連結** (arcwise connected) であるという．

(iii) D が弧状連結な開集合であるとき，D を**領域** (domain) とよぶ．

■ **例 2.15** ■　開円盤は領域である．

証明　$z_1, z_2 \in U_\rho(\alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{C},\ \rho > 0)$ に対して，$L(t) = (1-t)z_1 + tz_2$ $(t \in [0,1])$ とすれば，L は曲線（有限直線）であり，$L(0) = z_1, L(1) = z_2$．さらに，$|L(t)-\alpha| = |(1-t)(z_1-\alpha) + t(z_2-\alpha)| \leq (1-t)|z_1-\alpha| + t|z_2-\alpha| < (1-t)\rho + t\rho = \rho$. したがって，$L(t) \in U_\rho(\alpha)$, $t \in [0,1]$．ゆえに $U_\rho(\alpha)$ は弧状連結である．$U_\rho(\alpha)$ が開集合であることはすでに証明した（例 2.3）．よって，題意が成立する． ∎

【定義 2.31】 領域の閉包によって与えられる集合を**閉領域**という．

有界な閉領域を**有界閉領域**という．

■ **例 2.16** ■　閉円盤は有界閉領域である．

次の事実は有用である：

【命題 2.32】 D を領域とし，z_0, z_1 を D に属する任意の点とする．このとき，z_0 と z_1 を結ぶ，D 内の折れ線曲線が存在する．

証明　弧状連結性により，D 内の曲線 $C : [a,b] \to \mathbb{C}$ で $C(a) = z_0$, $C(b) = z_1$, $C(t) \in D$, $t \in [a,b]$ をみたすものが存在する．命題 2.25 によって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta = \delta_\varepsilon$（$\varepsilon$ に依存しうる定数）があって，$|t-s| < \delta$ $(t, s \in [a,b])$ ならば，$|C(t) - C(s)| < \varepsilon$ が成り立つ．閉区間 $[a,b]$ を n 等分して，$t_0 = a$, $t_1 = a + (b-a)/n, \cdots, t_j = a + (b-a)j/n, \cdots, t_n = b$ とおく．ただし，$(b-a)/n < \delta$ にとる．したがって，$|C(t_j) - C(t_{j-1})| < \varepsilon$, $j = 1, \cdots, n$．D が

開集合であることにより，ε を十分小さくとれば，各点 $C(t_j)$ の ε 近傍は D に含まれる．そこで，各 $j=1,\cdots,n$ に対して，点 $C(t_{j-1})$ と $C(t_j)$ を結ぶ有限直線 $L_j(s):=(1-s)C(t_{j-1})+sC(t_j), s\in[0,1]$ を定義すれば，$|L_j(s)-C(t_{j-1})|=s|C(t_j)-C(t_{j-1})|<\varepsilon$, $s\in[0,1]$ であるから，$L_j(s)\in D$ である．そこで，曲線 $L_1\cdots L_n$ を考えると，これは始点が z_0 で終点が z_1 の折れ線曲線であり，その像は D に含まれる． ∎

2.9　複素関数の極限と連続性

通常の微分積分学の場合と同様，複素解析学を展開するにあたっては，まず，複素関数の極限と連続性の概念を考察するのが自然である．まず，極限の概念を定義しよう：

【定義 2.33】 D を $\mathbb{C}$ の部分集合，$f:D\to\mathbb{C}$ を複素関数とする．$z_0, w_0\in\mathbb{C}$ とする．任意の $\varepsilon>0$ に対して，正数 $\delta>0$ があって，$|z-z_0|<\delta$, かつ $z\in D$ ならば $|f(z)-w_0|<\varepsilon$ が成り立つとき，f は点 z_0 において**極限値** w_0 をもつといい，このことを

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0 \quad \text{または} \quad f(z)\to w_0\ (z\to z_0)$$

と記す．この場合，「$\lim_{z\to z_0} f(z)$ は存在するという」言い方もする．この定義では，点 z_0 は D の点である必要はないことに注意．

複素関数 $f:D\to\mathbb{C}$ の実部を u，虚部を v としよう：

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y), \quad z=x+iy\in D, \quad x,y\in\mathbb{R}. \tag{2.20}$$

【定理 2.34】 $z_0=x_0+iy_0\in\mathbb{C}$ $(x_0,y_0\in\mathbb{R})$ とする．このとき，$\lim_{z\to z_0} f(z)$ が存在するための必要十分条件は，

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) \quad \text{および} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)$$

が存在することである．この場合，

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)+i\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) \tag{2.21}$$

が成り立つ．

証明 **(必要性)** $\alpha := \lim_{z \to z_0} f(z)$ が存在するとし，$\alpha = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とおく．このとき，命題 2.7 の証明と同様にして（照応関係は，$\lim_{n\to\infty} \to \lim_{z\to z_0}$，$z_n \to f(z)$，$x_n \to u(x,y)$，$y_n \to v(x,y)$），$\lim_{z\to z_0} u(x,y) = a$，$\lim_{z\to z_0} v(x,y) = b$．$\lim_{z\to z_0}$ は $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}$ と同じであるから，題意が成立する．

(十分性) 命題 2.7 の十分性の証明と同様． ∎

次の定理は極限の定義から容易に証明される[14)]．

【定理 2.35】 $f, g : D \to \mathbb{C}$ を複素関数とし，f, g は点 $z_0 \in \mathbb{C}$ でそれぞれ，極限値 a, b をもつとする：$\lim_{z\to z_0} f(z) = a$, $\lim_{z\to z_0} g(z) = b$．このとき，以下の (i)～(iv) が成り立つ．

(i) $\displaystyle\lim_{z\to z_0} |f(z)| = |a|$.

(ii) $\displaystyle\lim_{z\to z_0} \bigl(f(z) + g(z)\bigr) = a + b$.

(iii) $\displaystyle\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = ab$.

(iv) $b \neq 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a}{b}$.

次に連続性の概念を定義する．D を $\mathbb{C}$ の部分集合，$f : D \to \mathbb{C}$ を複素関数とする．f が D の点 z_0 において極限値 $f(z_0)$ をもつとき，すなわち，$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ が成り立つとき，f は点 z_0 で**連続** (continuous) であるという．

D の部分集合 F のすべての点で f が連続であるとき，f は $\boldsymbol{F}$ **上で連続**であるという．

連続関数の例は後で見ることにして，まず，定理 2.34 から，次の事実がしたがうことに注意しよう：

【定理 2.36】 $f : D \to \mathbb{C}$ とする．

(i) f が点 $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ で連続であるための必要十分条件は，u, v が点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ で連続であることである．

---

14) 証明の仕方は，$\mathbb{R}$ の部分集合上の実数値関数に関する，対応する事実の証明（微分積分学の本を参照）とまったく同様．

(ii) f が D 上で連続であるための必要十分条件は，u, v が D 上で連続であることである[15]．

定理 2.35 は次の定理を導く．

【定理 2.37】 $f, g : D \to \mathbb{C}$ は $z_0 \in D$ で連続であるとする．このとき，次の (i)〜(iv) が成り立つ．

(i) 写像 $|f| : z \mapsto |f(z)|$ は z_0 で連続である．

(ii) $f + g$, fg はいずれも z_0 で連続である．

(iii) $g(z_0) \neq 0$ ならば，$\dfrac{f}{g}$ は z_0 で連続である．

(iv) $w_0 = f(z_0)$ の近傍で定義で定義された複素関数 F が w_0 で連続ならば，合成関数 $F \circ f$ —— $(F \circ f)(z) := F(f(z))$ —— は点 z_0 で連続である．

証明　(iv) の証明のみを与える．h を $|h|$ が十分小さい複素数とし，$k := f(z_0 + h) - f(z_0)$ とおけば

$$(F \circ f)(z_0 + h) - (F \circ f)(z_0) = F(w_0 + k) - F(w_0)$$

と書ける．点 w_0 での F の連続性により，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，定数 $\delta > 0$ があって，$|k| < \delta$ ならば，$|F(w_0 + k) - F(w_0)| < \varepsilon$ が成り立つ．一方，点 z_0 での f の連続性により，定数 $\eta > 0$ が存在して，$|h| < \eta$ ならば，$|k| < \delta$ となる．ゆえに，$|h| < \eta$ ならば，$|(F \circ f)(z_0 + h) - (F \circ f)(z_0)| < \varepsilon$ が結論されるので，$F \circ f$ は点 z_0 で連続である．■

この定理から，次の結果が得られる：

【系 2.38】 $f, g : D \to \mathbb{C}$ は D 上で連続であるとする．このとき，次の (i)〜(v) が成り立つ．

(i) $|f|$ は D 上で連続である．

[15] 第 1 章の注意 1.1 で述べておいたように，これは，u, v が $D_{\mathbb{R}^2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + iy \in D\}$ 上の実数値関数として連続である，という意味である．

(ii) $f+g$ は D 上で連続である.

(iii) fg は D 上で連続である.

(iv) $g(z) \neq 0, z \in D$ ならば, $\dfrac{f}{g}$ は D 上で連続である.

(v) f の像 $f(D)$ を含む部分集合上で定義された連続な複素関数 F に対して, $F \circ f$ は D 上で連続である.

■ **例 2.17** ■ 定数関数 α ($\alpha \in \mathbb{C}$ は定数) は明らかに $\mathbb{C}$ 上で連続である. また, 1 次関数 z も $\mathbb{C}$ 上で連続である (証明は容易). よって, 系 2.38-(iii), (ii) によって, 1 次関数 $f(z) = \alpha z + \beta$ ($\beta \in \mathbb{C}$ は定数) は $\mathbb{C}$ 上で連続である.

■ **例 2.18** ■ 1 次関数 z の連続性と系 2.38-(iii) を繰り返し用いることにより, 任意の $k \in \mathbb{N}$ と定数 $\alpha_k \in \mathbb{C}$ に対して, 関数 $\alpha_k z^k$ は $\mathbb{C}$ 上で連続である. したがって, 系 2.38-(ii) を繰り返し用いることにより, n 次の多項式 $f(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$, $z \in \mathbb{C}$ は $\mathbb{C}$ 上で連続である.

■ **例 2.19** ■ $ad - bc \neq 0$ をみたす複素定数 a, b, c, d に対して, $D_{c,d} := \{z \in \mathbb{C} \mid cz + d \neq 0\}$ を定義域とする 1 次分数関数 $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ は, 例 2.17 と系 2.38-(iv) によって, $D_{c,d}$ 上で連続である.

次の事実はよく使われる:

【命題 2.39】 $f : D \to \mathbb{C}$ は $z_0 \in D$ で連続であり, $f(z_0) \neq 0$ とする. このとき, 正数 $\delta > 0$ があって, $z \in D, |z - z_0| < \delta$ ならば, $f(z) \neq 0$.

証明 仮定により, $c := |f(z_0)| > 0$. f の z_0 での連続性により, 任意の $\varepsilon \in (0, c)$ に対して, 正数 $\delta > 0$ があって, $z \in D, |z - z_0| < \delta$ ならば, $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ が成り立つ. したがって, 3 角不等式により, $|f(z)| = |(f(z) - f(z_0)) + f(z_0)| \geq |f(z_0)| - |f(z) - f(z_0)| > c - \varepsilon > 0$. ゆえに, $f(z) \neq 0$, $z \in D$, $|z - z_0| < \delta$. ■

2.10 一様連続性

連続性よりも強い連続性の概念を導入する. 複素関数 f の定義域は $D \subset \mathbb{C}$ を含むとする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 正数 δ があって, $|z - z'| < \delta$, $z, z' \in D$ ならば

$|f(z)-f(z')|<\varepsilon$ が成り立つとき，f は D 上で**一様連続** (uniformly continuous) であるという．

この定義の要点は，δ が ε だけによって，z, z' には依らないことである．（単に「連続である」という場合には，δ は z, z' に依存しうる．）もう少しわかりやすく言えば，f が D 上で一様連続であるというのは，任意に与えた正数 ε に対して，変数 z, z' の差の大きさ $|z-z'|$ が ε だけから決まる一定の限界 δ 以内にあれば，z, z' が D の中のどこにあろうとも，対応する f の値の差 $|f(z)-f(z')|$ は一様に一定の限界 ε で抑えられるということである．

次の事実を確認しておこう．

【命題 2.40】

(i) f が D 上で一様連続ならば，f は D 上で連続である．

(ii) $F\subset D$ で f が D 上で一様連続ならば，f は F 上で一様連続である．

証明　(i) $\varepsilon>0$ を任意にとり，δ を上の定義のものとする．このとき，任意の $\alpha\in D$ に対して，$|z-\alpha|<\delta,\ z\in D$ ならば $|f(z)-f(\alpha)|<\varepsilon$．したがって，$f$ は $z=\alpha$ で連続である．

(ii) 一様連続性の定義から明らか．($|z-z'|<\delta\ (z,z'\in D)$ ならば $|z-z'|<\delta\ (z,z'\in F)$ に注意.）　∎

一様連続に関する次の事実は基本的である．

【定理 2.41】　有界閉集合上の連続な複素関数は一様連続である．

証明　D を有界な閉集合とし，$f: D\to\mathbb{C}$ は連続であるとする．したがって，任意の $\varepsilon>0$ と $a\in D$ に対して，正数 δ_a（ε にも依存しうる）があって，$|z-a|<\delta_a, z\in D$ ならば $|f(z)-f(a)|<\varepsilon/2$ が成り立つ．明らかに，$D\subset\bigcup_{a\in D}U_{\delta_a/2}(a)$．有界閉集合はコンパクトであるから（定理 2.22)，自然数 n と $a_1,\cdots,a_n\in D$ があって，$D\subset\bigcup_{j=1}^{n}U_{\delta_{a_j}/2}(a_j)$ が成り立つ．$a\in D$ とすれば，ある番号 k があって，$a\in U_{\delta_{a_k}/2}(a_k)$．いま，$\delta=(1/2)\min_{j=1,\cdots,n}\delta_{a_j}$ とする．$|z-a|<\delta$ とすれば

$$|a-a_k|<\frac{\delta_{a_k}}{2}<\delta_{a_k},\quad |z-a_k|\le|z-a|+|a-a_k|<\delta+\frac{\delta_{a_k}}{2}\le\delta_{a_k}$$

したがって

$$|f(a) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(z) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ゆえに $|z-a| < \delta$ ならば $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$. よって，題意がしたがう． ∎

2.11 有 界 性

連続な複素関数が有する重要な性質のひとつを述べるためにある概念を導入する．D を $\mathbb{C}$ の部分集合とする．複素関数 $D \to \mathbb{C}$ について，$\sup_{z\in D} |f(z)| < \infty$ が成り立つとき —— 言い換えれば，定数 $M > 0$ があって，$|f(z)| \le M, z \in D$ が成り立つということ ——，f は D 上で**有界**であるという．D 上で有界でない関数は，D 上で**非有界**であるという．

【命題 2.42】 f, g が D 上で有界ならば，$f+g, fg$ も D 上で有界である．

証明　$M_f := \sup_{z\in D} |f(z)|$, $M_g := \sup_{z\in D} |g(z)|$ とすれば，$|f(z)| \le M_f < +\infty$, $|g(z)| \le M_g < +\infty$, $z \in D$. したがって，$|f(z)+g(z)| \le |f(z)|+|g(z)| \le M_f+M_g, z \in D$. ゆえに, $f+g$ は D 上で有界．また, $|f(z)g(z)| = |f(z)||g(z)| \le M_f M_g, z \in D$. したがって，$fg$ も D 上で有界． ∎

■ **例 2.20** ■　z の多項式は，任意の有界集合上で有界である．

証明　D を有界な集合とすれば，定数 $R > 0$ があって，$|z| \le R$, $z \in D$ が成り立つ．したがって，関数 z は D 上で有界．ゆえに，命題 2.42 における関数の積に関する性質を繰り返し用いることにより，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，関数 $\alpha_n z^n$（α_n は定数）は D 上で有界である．すると，今度は，命題 2.42 における関数の和についての性質を繰り返し使うことにより，題意がしたがう． ∎

■ **例 2.21** ■　$f(z) = 1/z$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上では非有界である．（$\because$ $|f(z)| = 1/|z|$ は $z \to 0$ のとき，無限大に発散する．）だが，この $f(z)$ は，任意の $R > 0$ に対して，$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \ge R\}$ 上では有界である．（$\because$ $|1/z| \le 1/R$, $|z| \ge R$.）

複素平面の部分集合を定義域とする有界な実数値関数についても，$\mathbb{R}^2$ 上の有界な実数値関数の場合と同様に，その最大値と最小値の概念を定義することができる．

g を D 上の有界な実数値関数とする．したがって，$M := \sup_{z\in D} g(z) < \infty$, $m := \inf_{z\in D} g(z) > -\infty$[16]．

(i) $z_0 \in D$ があって，$g(z_0) = M$ が成り立つならば，g は D で**最大値** M をもつといい，$M = \max_{z\in D} g(z)$ と表す．

(ii) $z_1 \in D$ があって，$g(z_1) = m$ が成り立つならば，g は D で**最小値** m をもつといい，$m = \min_{z\in D} g(z)$ と表す．

連続な複素関数についての次の性質は重要である：

【定理 2.43】 $\mathbb{C}$ の有界閉集合 D 上で連続な複素関数は D 上で有界である．さらに，非負値関数 $|f(z)|$ は D 上で最大値と最小値をもつ．

証明　定理 2.41 により，f は D 上で一様連続であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$|z-a| < \delta$ ならば $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つ．したがって，$|f(z)| < |f(a)| + \varepsilon \cdots (*)$．$D$ は有界であるから，$D \subset K$ となる矩形集合がある．$K = \{x + iy \mid x \in [a,b],\ y \in [c,d]\}$ としよう．$[a,b]$ を n 等分し，$I_j = [a + (b-a)(j-1)/n,\ a + (b-a)j/n]$, $j = 1, \cdots, n$ とおく．同様に $[c,d]$ を n 等分し，$J_k = [c + (d-c)(k-1)/n,\ c + (d-c)k/n], k = 1, \cdots, n$ とする．$D_{j,k} = \{x + iy \mid x \in I_j,\ y \in J_k\}$ とおけば，$K = \bigcup_{j,k=1}^{n} D_{j,k}$．したがって，$D = \bigcup_{j,k=1}^{n} D \cap D_{j,k}$．$n$ を十分大きくとれば，任意の $j, k = 1, \cdots, n$ と $z, a \in D_{j,k}$ に対して，$|z - a| < \delta$ とできる．したがって，そのような点 z, a に対して $(*)$ が成り立つ．ゆえに，$M_{j,k} := \sup_{z\in D\cap D_{j,k}} |f(z)| \leq |f(a)| + \varepsilon < \infty$．そこで，$M := \max_{j,k=1,\cdots,n} M_{j,k}$ とすれば $\sup_{z\in D} |f(z)| \leq M$ となるので f は有界である．

$M := \sup_{z\in D} |f(z)|$ とすれば，$|f(z_n)| \to M$ となる点列 $z_n \in D$ がとれる．D は有界であるから，$\{z_n\}_n$ は有界点列である．したがって，ボルツァーノ-ヴァイエルシュトラースの定理（定理 2.12）により，その部分列 $\{z_{n_k}\}_k$ で収束するものがある．$a = \lim_{k\to\infty} z_{n_k}$ とすれば，D は閉集合であるから，$a \in D$．$|f(z)|$ は連続であるから，$\lim_{k\to\infty} |f(z_{n_k})| = |f(a)|$．したがって，$M = |f(a)|$．ゆえに $|f(z)|$ は D で最大値をもつ．最小値についても同様．■

---

16) $a > -\infty$ は a が $-\infty$ でないことを表す．

2.12　連続関数の境界値

D を $\mathbb{C}$ の部分集合とし，関数 f を D 上の関数とする．D の境界 ∂D 上の 1 点 ζ に対して，極限

$$\lim_{z\in D, z\to\zeta} f(z) = \gamma_\zeta$$

が存在するとき，γ_ζ を ζ における f の**境界値** (boundary value) という．この場合，f は**点 ζ において境界値をもつ**という．

f が ∂D の各点 ζ において境界値をもつとき，写像 $\phi : \partial D \to \mathbb{C}$ が

$$\phi(\zeta) := \gamma_\zeta, \quad \zeta \in \partial D \tag{2.22}$$

によって定まる．境界値に関する次の定理は基本的である．

【定理 2.44】 D は開集合であるとする．f を D 上で連続な複素関数で ∂D の各点 ζ で境界値 $\phi(\zeta)$ をもつものとする．

(i) ϕ は ∂D 上の連続関数である．

(ii) $\zeta \in \partial D$ に対して，$f(\zeta) := \phi(\zeta)$ と定義すれば，f は $D \cup \partial D$ 上で連続である．

証明　(i) $\alpha \in \partial D$ を任意に固定する．仮定により，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ があって，$|z - \alpha| < \delta$, $z \in D$ ならば $|f(z) - \phi(\alpha)| < \varepsilon$．したがって，任意の $\zeta \in \partial D$ と $z \in U_\delta(\alpha) \cap D$ に対して $|\phi(\zeta) - \phi(\alpha)| \leq |\phi(\zeta) - f(z)| + |f(z) - \phi(\alpha)| < |\phi(\zeta) - f(z)| + \varepsilon$．命題 2.20-(i) によって，$\partial D = \bar{D} \setminus D$．したがって，$z_n \to \zeta$ $(n \to \infty)$ となる $z_n \in D$ がとれる．このとき，$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \phi(\zeta)$．また，$|z_n - \alpha| \leq |z_n - \zeta| + |\zeta - \alpha|$．したがって，$|\zeta - \alpha| < \delta$ ならば，十分大きな n に対して，$|z_n - \alpha| < \delta$．ゆえに $|\phi(\zeta) - \phi(\alpha)| < |\phi(\zeta) - f(z_n)| + \varepsilon \to \varepsilon$ $(n \to \infty)$．すなわち，$|\zeta - \alpha| < \delta$ ならば $|\phi(\zeta) - \phi(\alpha)| \leq \varepsilon$．これは ϕ の連続性を意味する．

(ii) f に関して，∂D 上での連続性だけを示せば十分である．だが，これは (i) の結果と境界値の定義から容易にしたがう．　■

2.13　広義の複素平面とリーマン球面

最後に，複素平面のある種の拡大について述べておこう．ひとつの記号 ∞（実無限ではない）を導入し，これを複素平面 $\mathbb{C}$ に付け加えてできる集合

$$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \tag{2.23}$$

を考える．点 ∞ の絶対値を $|\infty| = +\infty$（実無限）と定義する[17]．次の演算を設ける：

$$z \pm (\infty) = \infty, \quad \frac{z}{\infty} = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{2.24}$$

$$z \neq 0 \Longrightarrow z \cdot \infty = \infty, \quad \frac{z}{0} = \infty. \tag{2.25}$$

このような性質をもつものとして導入される点 ∞ を**無限遠点** (point at infinity) という．$\overline{\mathbb{C}}$ を**広義の複素平面**という．

無限遠点の記号 ∞ と実無限の記号 $+\infty$ は，本来ならば，区別されるべきである．だが，本書では，混乱のおそれのない場合，実無限も単に ∞ と記す場合がある．($a < \infty$ における ∞ は実無限である．)

広義の複素平面 $\overline{\mathbb{C}}$ おいて，無限遠点 ∞ を含む集合

$$U_\rho(\infty) := \left\{ z \in \overline{\mathbb{C}} \;\middle|\; 0 < \frac{1}{\rho} < |z| \leq +\infty \right\} \tag{2.26}$$

（$\rho > 0$ は定数）を **∞ の ρ 近傍**という．$a \neq \infty$ に対する ρ 近傍は $\mathbb{C}$ の場合と同じに定義する．$\overline{\mathbb{C}}$ において，このように近傍の概念を定義すると $\overline{\mathbb{C}}$ においても開集合の概念が $\mathbb{C}$ の場合と同様に定義される．したがって，無限遠点 ∞ を含む開集合の概念も定義される．

広義の複素平面を導入する利点のひとつは，複素関数の定義域を気にしなくてすむようになる場合があるということにある．たとえば，関数 $f(z) = 1/z$ は，$\mathbb{C}$ で考える限り，$z = 0$ はその定義域から除外されなければならないが，広義の複素平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上の関数とみるならば（終域も $\overline{\mathbb{C}}$ とする），それは $\overline{\mathbb{C}}$ 全体で定義されているとみなせる．実際，$1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$ である．

---

[17] 実無限 $+\infty$ とマイナスの実無限 $-\infty$ は，次の性質をもつ記号として導入される：任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$-\infty < a < +\infty$, $a/(\pm\infty) = 0$, $a + (\pm\infty) = \pm\infty$ ；任意の $b > 0$ と $c < 0$ に対して，$b(\pm\infty) = \pm\infty$, $c(\pm\infty) = \mp\infty$, $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$. なお，$a + (-\infty) = a - \infty$ と記す．$(+\infty) - (+\infty)$ および $(-\infty) - (-\infty)$ は定義されない．

ここで無限遠点の幾何学的意味を考えよう．3次元ユークリッド座標空間 $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, \xi) \mid x, y, \xi \in \mathbb{R}\}$ の x-y 平面を複素平面と同一視して考える．$c > 0$ とし，ξ 軸上の点 $(0, 0, c)$ を中心とする，半径 c の球面 S を考えると，これは原点Oで x-y 平面と接する．点Oを球面 S の南極とみるとき，点 $\mathrm{N}(0, 0, 2c)$ は S の北極になる．複素平面上の任意の点PとNを結ぶ直線は S とただ1つの点 $\mathrm{Q_P}$ で交わる（図2.4を参照）．

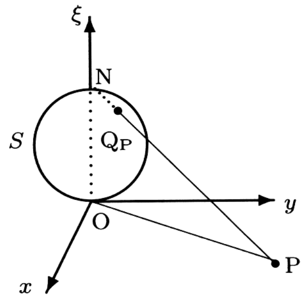


図 2.4　リーマン球面

対応：$\mathrm{P} \mapsto \mathrm{Q_P}$ により，$S \setminus \{\mathrm{N}\}$ と $\mathbb{C}$ は1対1に対応する．Pを表す複素数を z_P とするとき，Pがいかなる仕方で $|z_\mathrm{P}| \to +\infty$ となろうとも $\mathrm{Q_P}$ はNに近づく．この事態は次のことを示唆する．すなわち，$\mathbb{C}$ はただ1つの無限遠点をもち，これが S 上ではNに対応する．このようにしてその存在が直観的に想定される無限遠点をきちんと定式化したものが上述の ∞ である．

S は広義の複素平面 $\overline{\mathbb{C}}$ と1対1に対応する．このような球面を**リーマン球面**，または**複素数球面**という．

演習問題

$\beta \in \mathbb{C}$ は定数であるとする．

1. $D \subset \mathbb{C}$ が有界ならば，その補集合 $D^c = \mathbb{C} \setminus D$ は非有界であることを示せ．

2. 複素関数 f について，$\displaystyle\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ $(z_0, w_0 \in \mathbb{C})$ が成り立つとき，$\displaystyle\lim_{z \to z_0} f(z)^* = w_0^*$ を示せ．

3. $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{z^*}{z}$ は存在しないことを示せ．

4. 指数関数 $e^{\beta z}$ は $\mathbb{C}$ 上で連続であることを示せ．

5. 3 角関数 $\sin\beta z$, $\cos\beta z$ は $\mathbb{C}$ 上で連続であることを示せ．

6. 双曲線関数 $\sinh\beta z$, $\cosh\beta z$ は $\mathbb{C}$ 上で連続であることを示せ．

7. α を実数とする．

(i) 対数関数の枝 $\log_\alpha z$ は $\mathring{D}_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha - \pi < \arg z < \alpha + \pi\}$ 上で連続であることを示せ．

(ii) 任意の $\nu \in \mathbb{C}$ に対して，関数 z_α^ν は $\mathring{D}_\alpha$ 上で連続であることを示せ．

8. 次の式を証明せよ．ただし，a は実数であり，$\lim_{x\in\mathbb{R},x\to 0}$ は x が実数の範囲内で極限 $x \to 0$ をとるという意味である．

(i) $\displaystyle\lim_{x\in\mathbb{R},x\to 0}\frac{e^{iax}-1}{x} = ia.$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\in\mathbb{R},x\to 0}\frac{e^{iax}-1-iax}{x^2} = -\frac{a^2}{2}.$

9. $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{e^{\beta z}-1}{z} = \beta$ を証明せよ．

10. $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{\sin\beta z}{z} = \beta$ を証明せよ．

11. $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{\cos\beta z-1}{z^2} = -\frac{\beta^2}{2}$ を証明せよ．

12. $\omega \in \mathbb{C}$ は $\omega^2+\omega+1=0$ をみたす定数とする．f を $z=\omega$ の近傍で定義された連続関数とする．このとき

$$\lim_{z\to\omega}\frac{(z-\omega)f(z)}{z^3-1} = \frac{f(\omega)}{3\omega^2}$$

を証明せよ．

13. $D \subset \mathbb{C}$ $(D \neq \emptyset)$ とする．次の命題を証明せよ．

命題：$z \in \bar{D}$ であるための必要十分条件は，すべての $\varepsilon > 0$ に対して，$U_\varepsilon(z) \cap D \neq \emptyset$ が成り立つことである．

3
正則関数

自分の形而上学はいわば数学そのものであり，少なくともそうなる可能性があります．
— ライプニッツ[1)]

3.1 定義と例

1 個の実変数の実数値関数の微分可能性の概念を複素関数へと拡張する．D を $\mathbb{C}$ の開集合とし，関数 $f: D \to \mathbb{C}$ とする．D は開集合であるから，各 $z \in D$ に対して，正数 δ_z があって，$|w-z| < \delta_z$ ならば $w \in D$ が成り立つ．したがって，$|h| < \delta_z$ をみたす任意の $h \in \mathbb{C}$ に対して，$z+h \in D$．平たく言えば，$|h|$ が十分小さければ，$z+h \in D$ ということである．したがって，$|h|$ が十分小さければ，$f(z+h)$ が定義される．以下，この事実は，いちいち断らない．また，断りなしに出てくる h は複素数を表すものとする．

点 $z_0 \in D$ に対して，極限値

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \tag{3.1}$$

が存在するとき（もちろん，$h \neq 0$ とする)，この極限値を点 z_0 における f の**微分係数**といい，$f'(z_0)$ で表す．この場合，f は z_0 で**微分可能である**という．

D の各点 z で f が微分可能であるとき，f は D 上で微分可能であるという．このような関数は D で**正則である** (holomorphic)，または**解析的である** (analytic) という．

---

1) R. フィンスター/ファンデン・ホイフェル『ライプニッツ』(沢田允茂　監訳，向井　久 他訳，シュプリンガー・フェアラーク東京，1996) の p.198．ライプニッツ (Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz, 1646–1716) はドイツの哲学者，数学者．微分積分学の創始者のひとり．哲学，数学のいずれにおいても，第一級の独創的業績を残した．哲学では，単子論 Monadologie が有名である．

D 上の正則関数 f に対して，対応：$z \mapsto f'(z)$ は1つの写像（関数）を定める．この写像を f の**導関数**とよび，f', $\dfrac{df}{dz}$, $\dfrac{d}{dz}f$ などで表す：

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = \frac{d}{dz}f(z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}. \tag{3.2}$$

複素平面においては，ある複素数に接近するとき，その方向の取り方は無数にある．極限値 (3.1) が存在するということは，それが，h を0に近づけるときの方向の取り方によらずに存在することを意味している．これは，ある意味で，かなり強い条件である．以下で叙述する正則関数の理論がたいへん美しく強力な結果を内蔵しているのは，この特性の反映である．

点 $a \in \mathbb{C}$ が複素関数 f の定義域に属し，かつ a のある近傍で f が正則であるとき，a を f の**正則点** (regular point) とよぶ．この場合，「f は点 a において正則である」という言い方をする．f の正則点は，f がそこで単に微分可能である点ではないことに注意されたい．（f が点 $b \in \mathbb{C}$ で微分可能であっても，b は f の正則点とは限らない．）[2)]

f の正則点ではない点を f の**不正則点**とよぶ．

■ **例 3.1** ■　任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$f(z) = z^n$ は，$\mathbb{C}$ 上で正則であり

$$\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}.$$

証明　第1章の演習問題 20-(ii) を用いると，$(f(z+h)-f(z))/h = \sum_{k=1}^{n}(z+h)^{n-k}z^{k-1}$．$\lim_{h\to 0}(z+h)^{n-k} = z^{n-k}$ であり，$z^{n-k}z^{k-1} = z^{n-1}$ であるから，$\lim_{h\to 0}(f(z+h)-f(z))/h = \sum_{k=1}^{n} z^{n-1} = nz^{n-1}$．■

■ **例 3.2** ■　$a \in \mathbb{C}$ を複素定数とし，$z \neq a$ のとき，関数 $f(z) := (z-a)^{-1}$，$z = a$ のとき，$f(a) = \gamma$（定数）と定義する．このとき，次の (i), (ii) が成り立つ：(i) f は $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ 上で正則であり

$$f'(z) = -\frac{1}{(z-a)^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}.$$

(ii) a は f の不正則点である．

---

2) たとえば，$\mathrm{Im}\, z = 0$ のとき，$f(z) = z^2$；$\mathrm{Im}\, z \neq 0$ のとき，$f(z) = 0$ によって定義される関数 f は $z = 0$ で微分可能であるが，0以外の実軸上の点では微分可能ではない（確かめよ）．したがって，この f は，原点のどんな近傍をとっても，そこにおいて正則ではない．

証明　(i) $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ とする．$|h|$ が十分小さな $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して，$(f(z+h)-f(z))/h = -1/[(z+h-a)(z-a)] \to -1/(z-a)^2$ $(h \to 0)$．したがって，題意が成立する．

(ii) $(f(a+h)-f(a))/h = (1-h\gamma)/h^2$．したがって，$|(f(a+h)-f(a))/h| \to +\infty$ $(h \to 0)$．ゆえに，$\lim_{h\to 0}(f(a+h)-f(a))/h$ は存在しない．（もし，存在するとすれば，その絶対値の極限は存在する．）　∎

■ **例 3.3** ■　$e^z, \cos z, \sin z$ はいずれも $\mathbb{C}$ 上で正則であり

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z, \tag{3.3}$$

$$\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z, \tag{3.4}$$

$$\frac{d}{dz}\sin z = \cos z. \tag{3.5}$$

証明　$(e^{z+h}-e^z)/h = e^z(e^h-1)/h$. 第 2 章の演習問題 9 によって，$(e^h-1)/h \to 1$ $(h \to 0)$．したがって，$\lim_{h\to 0}(e^{z+h}-e^z)/h = e^z$．ゆえに e^z は $\mathbb{C}$ 上で正則であり，(3.3) が成り立つ．

加法定理より，$(\cos(z+h)-\cos z)/h = (\cos z)(\cos h-1)/h-(\sin z)\{(\sin h)/h\}$. 第 2 章の演習問題 10, 11 によって，右辺は，$h \to 0$ のとき，$-\sin z$ に収束する．したがって，$\cos z$ は $\mathbb{C}$ 上で正則であり，(3.4) が成り立つ．

$\sin z$ についても同様.　∎

微分可能でない関数もたくさんある．

■ **例 3.4** ■　$f(z) = z^*$ は $\mathbb{C}$ のどの点においても微分可能ではない．

証明　$(f(z+h)-f(z))/h = h^*/h$．だが，第 2 章の演習問題 3 で見たように，$h \to 0$ のとき，右辺の極限は存在しない．　∎

■ **例 3.5** ■　$f(z) = |z|$ は $\mathbb{C}$ のどの点においても微分可能ではない．

証明　$(f(z+h)-f(z))/h = (|z+h|^2-|z|^2)/[(|z+h|+|z|)h] = (|z+h|+|z|)^{-1}(z^* + z\frac{h^*}{h} + h^*)$．したがって，前例と同じ理由により，$h \to 0$ のときの右辺の極限は存在しない．　∎

次の事実は基本的である．

【定理 3.1】　$f : D \to \mathbb{C}$ が点 z_0 で微分可能ならば f は z_0 で連続である．

したがって，f が D 上で正則ならば，f は D 上で連続である．

証明　$w_h := (f(z_0+h)-f(z_0))/h$ とおけば，$f(z_0+h) = f(z_0)+hw_h$ であり，$\lim_{h\to 0} w_h = f'(z_0)$．したがって，$\lim_{h\to 0} hw_h = 0$．ゆえに $\lim_{h\to 0} f(z_0+h) = f(z_0)$．よって，題意が成立する．■

次の定理は複素関数の正則性の判定と正則関数に関する種々の計算において基本となる重要な定理である．

【定理 3.2】　複素関数 f, g は開集合 D で正則であるとする．このとき，次の (i)〜(iv) が成り立つ．

(i) $f+g$ は D で正則であり，$(f+g)'(z) = f'(z)+g'(z)$, $z \in D$.

(ii) （**ライプニッツ則**）　fg は D で正則であり

$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z), \quad z \in D.$$

(iii) 任意の $z \in D$ に対して，$g(z) \neq 0$ ならば，f/g は D 上で正則であり

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}, \quad z \in D.$$

(iv) （**合成関数の微分法**）　複素関数 F が $f(D)$ を含む開集合上で正則ならば，$F \circ f$ は D 上で正則であり

$$(F \circ f)'(z) = f'(z)F'(f(z)), \quad z \in D.$$

証明　通常の微分積分学における，1 実変数の実数値関数の和，積，商，合成関数の微分可能性に関する定理の証明とまったく並行的であるので，証明は読者に任せる．■

■ **例 3.6** ■　例 3.3 と合成関数の微分法（定理 3.2-(iv) を $f(z) = \beta z$ の場合に応用）によって，任意の $\beta \in \mathbb{C}$ に対して，$e^{\beta z}$, $\sin \beta z$, $\cos \beta z$ は $\mathbb{C}$ 上で正則であり

$$\frac{d}{dz}e^{\beta z} = \beta e^{\beta z}, \quad \frac{d}{dz}\sin \beta z = \beta \cos \beta z, \quad \frac{d}{dz}\cos \beta z = -\beta \sin \beta z \tag{3.6}$$

が成り立つ．

■ **例 3.7** ■ $\sinh\beta z$, $\cosh\beta z$ は $\mathbb{C}$ 上で正則であり

$$\frac{d}{dz}\sinh\beta z=\beta\cosh\beta z,\quad \frac{d}{dz}\cosh\beta z=\beta\sinh\beta z \tag{3.7}$$

が成り立つ.

証明 $\sinh\beta z=e^{\beta z}/2+e^{-\beta z}/(-2)$ であり, 前例から, $e^{\beta z}/2$, $e^{-\beta z}/(-2)$ はともに $\mathbb{C}$ 上で正則であるから, 定理 3.2-(i) によって, $\sinh\beta z$ は $\mathbb{C}$ 上で正則であり, $(\sinh\beta z)'=\beta e^{\beta z}/2-\beta e^{-\beta z}/(-2)=\beta\cosh\beta z$. $\cosh\beta z$ についても同様. ▮

3.2 正則関数の特徴づけ —— コーシー-リーマンの方程式

便宜上, $\mathbb{C}$ の開集合 D に対応する $\mathbb{R}^2$ の開集合 $D_{\mathbb{R}^2}:=\{(x,y)\mid x+iy\in D\}$ 上の関数 U に関する性質を述べるとき,「U は $D_{\mathbb{R}^2}$ 上〜」という言明を「U は D 上〜」という. たとえば, U が D 上偏微分可能であるという意味は「U は $D_{\mathbb{R}^2}$ 上偏微分可能」という意味である.

U が D 上偏微分可能な関数であるとき, D の変数 x に関する偏導関数を U_x, 変数 y に関する偏導関数を U_y と記す:

$$U_x(x,y):=\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=\partial_x U,\quad U_y(x,y):=\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=\partial_y U.$$

D を $\mathbb{C}$ の開集合とし, f を D 上の複素関数とする. すでに知っているように $u(x,y)=\mathrm{Re}\,f(z)$, $v(x,y)=\mathrm{Im}\,f(z)$ $(z=x+iy\in D)$ とすれば

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y),\quad z\in D \tag{3.8}$$

と書ける. 次の定理は f の正則性をその実部 u と虚部 v を用いて特徴づける基本定理である.

【定理 3.3】

(i) f が D 上で正則ならば, u,v は D 上で偏微分可能であり

$$u_x=v_y,\quad u_y=-v_x \tag{3.9}$$

が成り立つ. さらに

$$f'=u_x+iv_x=v_y-iu_y. \tag{3.10}$$

(ii) 逆に，u_x, u_y, v_x, v_y が D 上で連続であり，(3.9) が成立するならば，f は D で正則である．

証明　(i) f は D 上で正則であるとする．t を実数とすれば，

$$\frac{u(x+t,y)-u(x,y)}{t} = \frac{1}{2}\left\{\frac{f(z+t)-f(z)}{t} + \left(\frac{f(z+t)-f(z)}{t}\right)^*\right\}.$$

$t \to 0$ とすれば，右辺は $(1/2)(f'(z)+f'(z)^*) = \operatorname{Re} f'(z)$ に収束する．したがって，u は x について偏微分可能であり，$u_x(x,y) = \operatorname{Re} f'(z)$ が成り立つ．同様に

$$\frac{u(x,y+t)-u(x,y)}{t} = \frac{i}{2}\left\{\frac{f(z+it)-f(z)}{it} - \left(\frac{f(z+it)-f(z)}{it}\right)^*\right\}$$

と変形し，$t \to 0$ とすれば，右辺は $(i/2)(f'(z)-f'(z)^*) = -\operatorname{Im} f'(z)$ に収束する．したがって，u は y について偏微分可能であり，$u_y(x,y) = -\operatorname{Im} f'(z)$ が成り立つ．v については

$$\frac{v(x+t,y)-v(x,y)}{t} = \frac{1}{2i}\left\{\frac{f(z+t)-f(z)}{t} - \left(\frac{f(z+t)-f(z)}{t}\right)^*\right\},$$

$$\frac{v(x,y+t)-v(x,y)}{t} = \frac{1}{2}\left\{\frac{f(z+it)-f(z)}{it} + \left(\frac{f(z+it)-f(z)}{it}\right)^*\right\}$$

と変形し，$t \to 0$ とすれば，v は x, y について偏微分可能であり，$v_x(x,y) = \operatorname{Im} f'(z)$，$v_y(x,y) = \operatorname{Re} f'(z)$ であることがわかる．よって，(3.9) が成り立つ．さらに，このとき，$u_x(x,y) + iv_x(x,y) = \operatorname{Re} f'(z) + i \operatorname{Im} f'(z) = f'(z)$ であるから，(3.10) の第1式が成立する．これと (3.9) により，(3.10) の第2式が出る．

(ii) u_x, u_y, v_x, v_y は D 上で連続であるとし，(3.9) が成立するとする．$z = x+iy \in D$, $h = h_1 + ih_2$ とすれば

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{u(x+h_1,y+h_2)-u(x,y)}{h} + i\frac{v(x+h_1,y+h_2)-v(x,y)}{h}.$$

u_x, u_y は D 上で連続であるから，u は D 上で全微分可能である（微分積分学の本を参照）．したがって

$$u(x+h_1,y+h_2)-u(x,y) = h_1 u_x(x,y) + h_2 u_y(x,y) + \eta|h|$$

と書ける．ただし，η は $\lim_{h\to 0} \eta = 0$ となる実数である．同様に，v も D 上で全微分可能であり

$$v(x+h_1,y+h_2)-v(x,y) = h_1 v_x(x,y) + h_2 v_y(x,y) + \xi|h|$$

と書ける．ただし，ξ は $\lim_{h\to 0}\xi = 0$ となる実数である．これら 2 つの式を上式に代入し，(3.9) を使うと

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - u_x(x,y) - iv_x(x,y) = (\eta + i\xi)\frac{|h|}{h}$$

が得られる．| 右辺 | $\leq |\eta| + |\xi| \to 0$ $(h \to 0)$ であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = u_x + iv_x.$$

したがって，f は z で微分可能である．ゆえに f は D 上で正則である． ▮

一般に，$\mathbb{R}^2$ 内の開集合を定義域とする 2 つの実数値関数 u, v に関する方程式 (3.9) を**コーシー-リーマンの方程式** (Cauchy-Riemann) という．

■ **例 3.8** ■ 対数関数の主値 $\operatorname{Log} z$ は $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上で正則であり

$$\frac{d}{dz}\operatorname{Log} z = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

が成り立つ（演習問題 7 も参照）．

証明 $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ とするとき，$\operatorname{Log} z = u(x,y) + iv(x,y)$ と書ける．ただし，$u(x,y) := \log|z| = (1/2)\log(x^2+y^2)$, $v(x,y) = \operatorname{Arg} z$. $\tan^{-1} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ によって逆正接関数の主値を表す：$\tan^{-1} s = t \Longleftrightarrow s = \tan t$ $(s \in \mathbb{R}, t \in (-\pi/2, \pi/2))$．この関数を用いると，$v(x,y)$ は次のように表される：$x > 0, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ のとき, $v(x,y) = \tan^{-1}(y/x)$; $x < 0, y > 0$ のとき, $v(x,y) = \pi + \tan^{-1}(y/x)$; $x < 0, y < 0$ のとき, $v(x,y) = -\pi + \tan^{-1}(y/x)$; $x = 0, y > 0$ のとき, $v(x,y) = \pi/2$; $x = 0, y < 0$ のとき, $v(x,y) = -\pi/2$. 容易にわかるように，u, v はともに，$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上で連続微分可能であり，$u_x(x,y) = x/(x^2+y^2)$, $u_y(x,y) = y/(x^2+y^2)$, $v_x(x,y) = -y/(x^2+y^2)$, $v_y(x,y) = x/(x^2+y^2)$ が成り立つ．したがって，$u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. すなわち，u, v はコーシー-リーマンの方程式をみたす．ゆえに，定理 3.3-(ii) によって，$\operatorname{Log} z$ は $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上で正則であり，$d\operatorname{Log} z/dz = u_x - iu_y = 1/z$ が成り立つ． ▮

定理 3.3 から導かれる基本的な事実をみよう．

【系 3.4】 領域 D 上の正則関数 f が実数値ならば（すなわち，$f(z) \in \mathbb{R}, z \in D$），$f$ は定数である．

証明　$f = u + iv$ とすれば，$v = 0$．これとコーシー-リーマンの方程式によって，$u_x = 0$, $u_y = 0$．D は領域であるから，定数 $c \in \mathbb{R}$ があって，$u(x, y) = c$, $x + iy \in D$ となる．したがって，$f(z) = c$, $z \in D$．ゆえに題意が成立する．　■

この系の対偶を考えれば，領域 D 上の定数でない正則関数は，その像の中に必ず虚数を有することが結論される．

【系 3.5】　領域 D 上の正則関数 f の導関数が D 上で恒等的にゼロ，すなわち，$f'(z) = 0$, $z \in D$ をみたすならば，f は D 上で定数である．（すなわち，ある定数 $c \in \mathbb{C}$ があって，$f(z) = c$, $z \in D$.）

証明　仮定と (3.10) によって，$u_x = v_x = 0$, $u_y = v_y = 0$．したがって，実定数 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ があって，$u(x, y) = c_1$, $v(x, y) = c_2$, $x + iy \in D$．（ここに D が領域であることがきく.）そこで，$c = c_1 + ic_2$ とすれば，$f(z) = c$, $z \in D$.　■

【系 3.6】　領域 D 上の正則関数 f, g が $f'(z) = g'(z)$, $z \in D$ をみたすならば，ある定数 $c \in \mathbb{C}$ があって，$f(z) = g(z) + c$, $z \in D$ が成り立つ．

証明　$F = f - g$ とおくと，F は D 上で正則であり，$F'(z) = 0$, $z \in D$．したがって，系 3.5 によって，$F(z) = c$, $z \in D$ となる定数 $c \in \mathbb{C}$ がある．ゆえに $f(z) = g(z) + c$, $z \in D$.　■

【系 3.7】　領域 D 上の正則関数 f の絶対値 $|f(z)|$ が D 上で定数ならば，$f(z)$ も D 上で定数である．

証明　$|f(z)| = c$, $z \in D$ とする．もし，$c = 0$ ならば，$f(z) = 0$, $z \in D$ であるから，題意が成立する．そこで，$c \neq 0$ とする．このとき，$f = u + iv$ とすれば，$u^2 + v^2 = c^2 \neq 0$．両辺を x, y で偏微分すれば，$u_x u + v_x v = 0 \cdots (*)$, $u_y u + v_y v = 0 \cdots (**)$．コーシー-リーマンの方程式により，$(**)$ は $-u_x v + v_x u = 0$ と同値である．これと $(*)$ により，$v_x(u^2 + v^2) = 0$ かつ $u_x(u^2 + v^2) = 0$ が導かれる．したがって，$v_x = 0$, $u_x = 0$．ゆえに，(3.10) によって，$f'(z) = 0$, $z \in D$．これと系 3.5 は題意を意味する．　■

3.3　ラプラスの方程式と調和関数

コーシー-リーマンの方程式に関連する基本的な事実を証明しよう．

$\mathbb{R}^2$ の開集合上の 2 回微分可能な関数 f の偏微分について

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

という記法も用いる．

【命題 3.8】 $\mathbb{R}^2$ 内の開集合を定義域とする 2 回連続微分可能な実数値関数 u, v がコーシー-リーマンの方程式 (3.9) をみたすならば

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{3.11}$$

が成り立つ．

証明　$u_x = v_y$ より，$u_{xx} = v_{yx}$．また，$u_y = -v_x$ より，$u_{yy} = -v_{xy}$．仮定により，$v_{yx} = v_{xy}$．したがって，$u_{xx} + u_{yy} = 0$．同様に，$v_{xx} = -u_{yx}$, $v_{yy} = u_{xy}$ で $u_{yx} = u_{xy}$ であるから，$v_{xx} + v_{yy} = 0$．　■

一般に，$\mathbb{R}^d = \{(x_1, \cdots, x_d) \mid x_j \in \mathbb{R}, j = 1, \cdots, d\}$ 内に定義域をもつ 2 回微分可能な複素数値関数 F についての偏微分方程式

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} = 0 \tag{3.12}$$

を ***d* 次元ラプラス方程式** (Laplace equation) という[3]．この方程式をみたす関数 F を ***d* 次元調和関数** (harmonic function) という．特に，F が実数値のとき，F を**実調和関数**という．ただし，文脈において混乱のおそれのない場合には，実調和関数も単に調和関数という（以下，本書では，この語法を用いる）．

命題 3.8 は，**コーシー-リーマンの方程式にしたがう 2 回連続微分可能な関数 u, v はそれぞれ，2 次元調和関数である**ことを語る．このような u, v を**互いに共役な調和関数**という．

定理 3.3-(i) と命題 3.8 から次の結果が得られる．

---

[3] ラプラス (Pierre Simon Marquis de Laplace, 1749–1827) はフランスの数学者，天文学者．天体力学に一段階を劃した．確率論にも重要な業績を残している．

【系 3.9】 $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$（$D$ は開集合）が正則で u, v が 2 回連続微分可能ならば，u, v は互いに共役な調和関数である．

■ **例 3.9** ■　$u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $v(x, y) = 3x^2y - y^3$ は互いに共役な調和関数である（$f(z) = z^3$ の場合）．

■ **例 3.10** ■　$u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$ は互いに共役な調和関数である（$f(z) = e^z$ の場合）．

■ **例 3.11** ■　$u(x, y) = \cos x \cosh y$, $v(x, y) = -\sin x \sinh y$ は互いに共役な調和関数である（$f(z) = \cos z$ の場合）．

■ **例 3.12** ■　$u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$, $v(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$ $(x > 0)$ は互いに共役な調和関数である（$f(z) = \operatorname{Log} z$ の場合）．

3.4　調和関数から正則関数へ

系 3.9 は正則関数から調和関数が派生する構造を示している．では，逆に，調和関数から正則関数が生み出される構造が存在するであろうか．答えは，然り，である：

【定理 3.10】　u を開集合 D 上の 2 回連続微分可能な実調和関数とする．このとき

$$f(z) := u_x(x, y) - iu_y(x, y), \quad z = x + iy \in D$$

によって定義される複素関数 f は D 上で正則である．

証明　$U = u_x, V = -u_y$ とおけば，$\operatorname{Re} f = U$, $\operatorname{Im} f = V$ であり，U, V は連続微分可能である．仮定により，$u_{xx} + u_{yy} = 0$．これを用いると，$U_x = u_{xx} = -u_{yy} = V_y$．また，$U_y = u_{xy} = -V_x$．したがって，$U, V$ はコーシー-リーマンの方程式をみたす．ゆえに，定理 3.3-(ii) によって，f は D 上で正則である．▮

演習問題

1. 開集合 $D \subset \mathbb{C}$ で定義された複素関数 f は，$z = x + iy \in D$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とするとき，対応：$(x, y) \mapsto f(x + iy)$ によって，x, y の関数とみることができる．

$f(z)$ が x, y について偏微分可能で

$$\partial_x f(z) = -i\partial_y f(z)$$

をみたし，かつ $\partial_x f, \partial_y f$ が D 上で連続ならば，f は D 上で正則であることを示せ．

2. $\tan z$ は $\mathbb{C} \setminus \{(2n+1)\pi/2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ で正則であり

$$\frac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z$$

が成り立つことを示せ．

3. $\cot z$ は $\mathbb{C} \setminus \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ で正則であり

$$\frac{d}{dz}\cot z = -\mathrm{cosec}^2 z$$

が成り立つことを示せ．

4. $\tanh z$ は $\mathbb{C} \setminus \{(2n+1)\pi i/2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ で正則であり

$$\frac{d}{dz}\tanh z = \mathrm{sech}^2 z$$

が成り立つことを示せ．

5. $\coth z$ は $\mathbb{C} \setminus \{n\pi i \mid n \in \mathbb{Z}\}$ で正則であり

$$\frac{d}{dz}\coth z = -\mathrm{cosech}^2 z$$

が成り立つことを示せ．

6. (i) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ の実数値関数 $u(x, y), v(x, y)$ に関するコーシー－リーマンの方程式は，極座標 (r, θ) $(r = \sqrt{x^2 + y^2},\ x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$ に関する方程式

$$\partial_r u = \frac{1}{r}\partial_\theta v, \quad \partial_r v = -\frac{1}{r}\partial_\theta u \cdots (*)$$

と同値であることを示せ．

(ii) u, v が開集合 D 上で連続微分可能で $(*)$ をみたすならば，$f = u + iv$ は正則であり

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left(\partial_r u - \frac{i}{r}\partial_\theta u\right), \quad z = re^{i\theta}$$

であることを示せ．

7. $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，$\overset{\circ}{D}_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \alpha - \pi < \arg z < \alpha + \pi\}$ とおく．

(i) $\log_\alpha z$ は $\overset{\circ}{D}_\alpha$ 上で正則であり

$$\frac{d}{dz}\log_\alpha z = \frac{1}{z}, \quad z \in \overset{\circ}{D}_\alpha$$

であることを示せ．

(ii) 任意の $\nu \in \mathbb{C}$ に対して，z_α^ν は $\overset{\circ}{D}_\alpha$ 上で正則であり

$$\frac{d}{dz}z_\alpha^\nu = \nu z_\alpha^{\nu-1}, \quad z \in \overset{\circ}{D}_\alpha$$

であることを示せ．

ヒント：いずれも前問を応用せよ．

8. $\text{p.v.}a^z$ $(a \neq 0)$ は $\mathbb{C}$ 上で正則であり

$$\frac{d}{dz}\text{p.v.}a^z = (\operatorname{Log} a)\text{p.v.}a^z$$

であることを示せ．

9. 領域 D 上の関数 f について，f および f^* がともに D で正則ならば，f は定数であることを示せ．

10. a を実定数として，$v(x, y) = y^3 + ay - 3x^2y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ とおく．

(i) v は調和関数であることを示せ．

(ii) v を虚部とする正則関数を求めよ．

11. n を任意の自然数とする．

(i) $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$P_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k {}_{2n}C_{2k}\, x^{2(n-k)} y^{2k},$$

$$Q_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k {}_{2n+1}C_{2k+1}\, x^{2(n-k)-1} y^{2k+1}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

は調和関数であることを証明せよ．ただし，${}_mC_r := m!/[(m-r)!r!]$ $(m, r \in \{0\} \cup \mathbb{N})$ は 2 項係数である．

(ii) $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f_n(x,y) := xP_n(x,y) - yQ_n(x,y),$$

$$g_n(x,y) := yP_n(x,y) + xQ_n(x,y)$$

は調和関数であることを示せ．

4

積分定理とその応用

4.1 線 積 分

複素関数の曲線上の積分を定義しよう．$C = X + iY : [a, b] \to \mathbb{C}$ を連続微分可能な曲線とし，f を，C の像を含む開集合上の複素数値連続関数とする．このとき

$$\int_C f\,dx := \int_a^b f(C(t))X'(t)dt, \quad \int_C f\,dy := \int_a^b f(C(t))Y'(t)dt \tag{4.1}$$

($z = x + iy,\, x,\, y \in \mathbb{R}$) を定義し（対応：$t \mapsto f(C(t))X'(t)$ と $t \mapsto f(C(t))Y'(t)$ はともに曲線であることに注意)，前者を曲線 C に沿う，f の **x 方向に関する線積分**，後者を曲線 C に沿う，f の **y 方向に関する線積分**という．この場合，C を線積分の**積分路**といい，点 $C(a)$ を積分路の**下端**または**始点**，$C(b)$ を**上端**または**終点**とよぶ．次の事実は基本的である：

【命題 4.1】 $C : [a, b] \to \mathbb{C}$ を連続微分可能な曲線とする．

(i) （**線積分のパラメータ変換不変性**）$\widetilde{C}$ を C と同値な連続微分可能な曲線とすれば

$$\int_{\widetilde{C}} f\,dx = \int_C f\,dx, \quad \int_{\widetilde{C}} f\,dy = \int_C f\,dy.$$

(ii) $-C$ を C と逆向きの連続微分可能な曲線とすれば

$$\int_{-C} f\,dx = -\int_C f\,dx, \quad \int_{-C} f\,dy = -\int_C f\,dy.$$

証明 (i) 連続微分可能な曲線の同値性の定義により (2.8.2 項)，全単射で連続微分可能な写像 $h : [c, d] \to [a, b]$ で $h'(s) > 0, s \in [a, b]$ かつ $\widetilde{C}(s) = C(h(s)) =$

$X(h(s))+iY(h(s)), s\in[c,d]$ をみたすものがある．したがって

$$I:=\int_{\widetilde{C}} f dx=\int_c^d f(\widetilde{C}(s))\frac{d}{ds}X(h(s))ds=\int_c^d f(C(h(s)))h'(s)X'(h(s))ds.$$

そこで，変数変換 $t=h(s)$ を行うと，h は単調増加で $dt=h'(s)ds$ であるから，$I=\int_a^b f(C(t))X'(t)dt=\int_C f dx$．積分 $\int_{\widetilde{C}} f dy$ についても同様．

(ii) (i) によって，$(-C)(t)=C(a+b-t), t\in[a,b]$ の場合を考えれば十分である（例 2.11 のすぐ前の記述を参照）．このとき

$$J:=\int_{-C} f dx=\int_a^b f(C(a+b-t))\frac{d}{dt}X(C(a+b-t))dt$$
$$=-\int_a^b f(C(a+b-t))X'(C(a+b-t))dt.$$

そこで，変数変換 $s=a+b-t$ をすれば，$J=-\int_b^a f(C(s))X'(s)(-1)ds=-\int_C f dx$．積分 $\int_{-C} f dy$ についても同様． ∎

区分的に連続微分可能な曲線 $C=C_1\cdots C_n$（連続微分可能な曲線 $C_1,\cdots,C_n$ の和）については

$$\int_C f\,dx:=\sum_{i=1}^n\int_{C_i} f\,dx,\quad \int_C f\,dy:=\sum_{i=1}^n\int_{C_i} f\,dy \tag{4.2}$$

と定義する．このとき，容易に確かめられるように，命題 4.1 は，C が区分的に連続微分可能な場合にも成立する（“連続微分可能” を “区分的に連続微分可能” と読み直す）．

$C:[a,b]\to\mathbb{C}$ を区分的に連続微分可能な閉曲線とする（したがって，$C(a)=C(b)$）．$\gamma\in(a,b)$ を任意にとり，写像 $C_\gamma:[\gamma,b+\gamma-a]\to\mathbb{C}$ を次のように定義する：$C_\gamma(t):=C(t), \gamma\le t\le b\,; C_\gamma(t):=C(t-b+a), b\le t\le b+\gamma-a$．このとき，$C_\gamma$ は区分的に連続微分可能な閉曲線であり，その始点（＝終点）は $C(\gamma)$ である．これは，要するに，幾何学的には，像は C の像と同じであるが，始点（＝終点）が異なる閉曲線である．

次の命題は，閉曲線に沿う線積分は，始点（＝終点）の取り方に依存しないことを語る：

【命題 4.2】 $C:[a,b]\to\mathbb{C}$ を区分的に連続微分可能な閉曲線とする（したがって，$C(a)=C(b)$）．f は C の像を含む開集合上で連続な関数とする．$\gamma\in(a,b)$

を任意にとり，C_γ を上述のものとする．このとき

$$\int_C f\,dx = \int_{C_\gamma} f\,dx, \quad \int_C f\,dy = \int_{C_\gamma} f\,dy \tag{4.3}$$

が成り立つ．

証明　線積分の定義により

$$\begin{aligned}\int_{C_\gamma} f\,dx &= \int_\gamma^b f(C(t))X'(t)dt + \int_b^{b+\gamma-a} f(C(t-b+a))X'(t-b+a)dt \\ &= \int_\gamma^b f(C(t))X'(t)dt + \int_a^\gamma f(C(t))X'(t)dt = \int_C f\,dx.\end{aligned}$$

$\int_{C_\gamma} f dy$ についても同様．　■

■ 例 4.1 ■　曲線 C の像が連続微分可能な関数 $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ のグラフで与えられるとき，すなわち，$C(t) = t + ig(t)$, $t \in [a,b]$ であるならば ── $X(t) = t$, $Y(t) = g(t)$, $X'(t) = 1$, $Y'(t) = g'(t)$ であるから ──

$$\int_C f\,dx = \int_a^b f(t+ig(t))dt, \quad \int_C f\,dy = \int_a^b f(t+ig(t))g'(t)dt.$$

■ 例 4.2 ■　グラフ：$y = x^2, x \in [a,b]$ を像とする曲線 $C(t) = t + it^2, t \in [a,b]$ に沿う線積分 $\int_C xy\,dx$（$f(z) = xy$ の場合）を求めよ．

解　前例により，$\int_C xy\,dx = \int_a^b x^3 dx = (b^4 - a^4)/4 = (b^2 + a^2)(b+a)(b-a)/4$.　■

■ 例 4.3 ■　円 $\mathsf{C}_R = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ を像とする曲線 $C(t) = Re^{it}, t \in [0, 2\pi]$ に沿う線積分 $\int_C xy\,dx$ を求めよ．

解　$X(t) = R\cos t, Y(t) = R\sin t$ であるから，$\int_C xy\,dx = -R^3 \int_0^{2\pi} \cos t\,\sin^2 t\,dt$. 2 倍角の公式により，$\cos t\,\sin^2 t = \sin 2t\,(\sin t)/2$．これと 3 角関数の積を和に直す公式

$$\sin x\,\sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

を用いると $\cos t\,\sin^2 t = (\cos t - \cos 3t)/4$．したがって，$\int_0^{2\pi} \cos t\,\sin^2 t\,dt = 0$. ゆえに $\int_C xy\,dx = 0$.　■

4.2 ガウス–グリーンの定理

この節では，平面における線積分に関する基本的な定理のひとつを証明する．そのために，まず，曲線の基本的なクラスのひとつを導入しておく．

次の (i) または (ii) のいずれかの性質をもつ曲線 $C:[a,b]\to\mathbb{C}$ $(a,b\in\mathbb{R}, a<b)$ を**単純曲線** (simple curve) または**ジョルダン曲線** (Jordan curve) という[1]：

(i) C が閉曲線でない場合 $[C(a)\neq C(b)]$，$t\neq t'$ $(t,t'\in[a,b])$ ならば $C(t)\neq C(t')$．（これは，C が単射であるということ．）

(ii) C が閉曲線の場合 $[C(a)=C(b)]$，$C(a)\neq C(t), \forall t\in(a,b)$ かつ $t\neq t'$ $(t,t'\in(a,b))$ ならば $C(t)\neq C(t')$．

(ii) の場合の C を**単純閉曲線**または**ジョルダン閉曲線**という[2]．

■ **例 4.4** ■ 点 $\alpha\in\mathbb{C}$ を任意にとる．$r:[0,2\pi]\to(0,\infty)$; $t\mapsto r(t)$ を連続関数とし，$r(0)=r(2\pi)$ をみたすものとする．このとき，$C(t):=\alpha+r(t)e^{it}, t\in[0,2\pi]$ によって定義される写像 $C:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ は単純閉曲線である[3]．

単純閉曲線については次の事実が基本的である．

【定理 4.3】（ジョルダンの曲線定理） 平面上の任意の単純閉曲線 C の像 $\mathsf{R}(C)$ を平面から除いた集合 $\mathsf{R}(C)^c=\mathbb{C}\setminus\mathsf{R}(C)$ は互いに素な 2 つの領域の和集合である．その一方は有界で，もう一方は有界でない．さらに $\mathsf{R}(C)$ は，これら 2 つの領域の共通の境界となる．

この定理の主張は，描像的には，自明に思われるかもしれないが，決してそうではない（これを実感するには，自分で証明を試みてみることである）．実際，厳密な証明には，多くの紙数を要する．それゆえ，ここでは，その証明は省略する[4]．

---

1) **単一曲線**という場合もある．描像的に言えば，単純曲線とは，始点と終点を除いては，みずからと交わりをもたない曲線のことである．なお，ジョルダン (Marie Ennemond Camille Jordan, 1838–1922) はフランスの数学者．コレジュ・ド・フランスの数学教授．

2) **単一閉曲線**という場合もある．

3) この型の単純閉曲線の具体的な例としては，円周や凸多角形の周を像とする閉曲線がある．

4) 証明に興味のある読者は，曲線論を含む集合論や幾何学ないし位相幾何学の適当な本を参照されたい．たとえば，辻 正次著・小松勇作 改訂『新版 集合論』（共立出版，1967）の付録 I を参照（証明は実に 10 ページにおよぶ）．

定理 4.3 にいう有界な領域と非有界な領域をそれぞれ，**単純閉曲線 C の内部** (interior domain), **外部** (exterior domain) という．前者，後者をそれぞれ，記号的に，C_{int}, C_{ext} で表す．したがって，$C_{\mathrm{int}} \cap C_{\mathrm{ext}} \cap \mathsf{R}(C) = \emptyset$, $C_{\mathrm{int}} \cup C_{\mathrm{ext}} \cup \mathsf{R}(C) = \mathbb{C}$, $\partial C_{\mathrm{int}} = \partial C_{\mathrm{ext}} = \mathsf{R}(C)$.

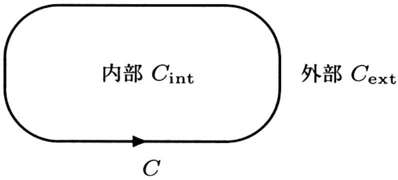


図 4.1　単純閉曲線

単純閉曲線 $C = C(t)$ のパラメータ t が増えていくとき，閉曲線上の点が C の内部を左に見て進むとき（すなわち，反時計回りに移動するとき）（図 4.1 を参照），単純閉曲線 C の向きは**正**であるという．そうでない場合は，単純閉曲線の向きは**負**であるという．これは厳密には次のように定義される：$C : [a, b] \to \mathbb{C}$ を単純閉曲線とするとき，各 $t \in [a, b)$ に対して，点 $z_0 \in C_{\mathrm{int}}$ と $\delta > 0$ があって，$0 < \varepsilon < \delta$ ならば $\overrightarrow{z_0C(t)} \times \overrightarrow{z_0C(t+\varepsilon)} > 0$ (< 0) となるとき（記号については 1.4.3 項を参照），**C の向きは正 (負) である**という[5)]．本書では，特に断らない限り，単純閉曲線の向きは正であるとする．

なお，点 α が単純閉曲線 C の内部にあり，C の向きが正であるとき，「C は点 α のまわりを反時計回り，または正の向きに一周する」という．

$\mathbb{C}$ の開集合 D 上の複素数値関数 $f : D \to \mathbb{C}$; $D \ni z = x + iy \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ が $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ の関数として，x, y について偏微分可能であり，その偏導関数 f_x, f_y が D 上で連続であるとき，f は **C^1 級**であるという．

区分的に連続微分可能な曲線（閉曲線）C が単純曲線（単純閉曲線）であるとき，C を**区分的に連続微分可能な単純曲線（単純閉曲線）**という[6)]．

次の定理は面積分と線積分を関連づける重要な定理である：

【定理 4.4】(ガウス–グリーンの定理[7)])　D は $\mathbb{C}$ の有界領域で，区分的に連続微分可能な単純閉曲線 C の内部になっているとする．f, g は D の閉包 $\bar{D}$ を含む領

5,6) 括弧には括弧を対応させて読む．

7) グリーン (George Green, 1793–1841) はイギリスの数学者．数学を電磁気学へ応用した．

域上の複素数値関数で C^1 級であるとする．このとき

$$\iint_D (f_x - g_y)dxdy = \int_C g\,dx + \int_C f\,dy. \tag{4.4}$$

ただし，左辺の $\iint_D(\cdot)dxdy$ は D 上の 2 重積分を表す[8]．

証明 与えられた条件をみたす一般の単純閉曲線 C に対して，(4.4) を厳密に証明するには，かなりの準備と紙数を要する．そこで，ここでは，D が，図 4.2 に示されたような単純な領域 D の場合についてだけ厳密な証明を行うことにする[9]．

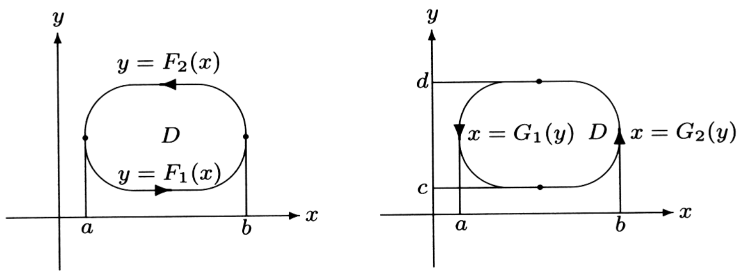


図 4.2 D が単純な形の場合

図 4.2 における F_1, F_2 は閉区間 $[a,b]$ 上の連続微分可能な関数で

$$F_1(x) < F_2(x),\ x \in (a,b),\ F_1(a) = F_2(a),\ F_1(b) = F_2(b)$$

をみたし，G_1, G_2 は閉区間 $[c,d]$ 上の連続微分可能な関数で

$$G_1(y) < G_2(y),\ y \in (c,d),\ G_1(c) = G_2(c),\ G_1(d) = G_2(d)$$

をみたすものとする．さらに，

$$\partial D\ (D\ の境界) = F_1([a,b]) \cup F_2([a,b]) = G_1([c,d]) \cup G_2([c,d])$$

がみたされるとする．D を式で表せば

$$\begin{aligned} D &= \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x \in [a,b],\ F_1(x) < y < F_2(x)\} \\ &= \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y \in [c,d],\ G_1(y) < x < G_2(y)\}. \end{aligned}$$

---

8) D に対応する $\mathbb{R}^2$ の領域 $\{(x,y) \mid x + iy \in D\}$ 上の 2 重積分．

9) 後に述べる注意と合わせれば，“実用上は”，この場合でほとんど間に合う．また，公式 (4.4) の背後にある構造を直観的に把握するにも適切である．

したがって

$$C_1(t) := t + iF_1(t),\ t \in [a,b]\ ;\ C_2(t) := 2b - t + iF_2(2b-t),\ t \in [b, 2b-a]$$

$$C_3(s) := G_2(s) + is,\ s \in [c,d]\ ;\ C_4(s) := G_1(2d-s) + i(2d-s),\ s \in [d, 2d-c]$$

とすれば，曲線 $C := C_1 \cdot C_2$, $\widehat{C} := C_3 \cdot C_4$ は，同値な，区分的に連続微分可能な単純閉曲線であり，その内部領域は D であり，$\partial D = C([a, 2b-a]) = \widehat{C}([c, 2d-c])$ が成り立つ．さて，2 重積分に関する積分順序の交換可能定理を応用すれば

$$\begin{aligned}\iint_D f_x\, dxdy &= \int_c^d \left(\int_{G_1(y)}^{G_2(y)} f_x\, dx \right) dy \\ &= \int_c^d [f(G_2(y) + iy) - f(G_1(y) + iy)] dy = \int_{\widehat{C}} f\, dy.\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}\iint_D g_y\, dxdy &= \int_a^b \left(\int_{F_1(x)}^{F_2(x)} g_y\, dy \right) dx \\ &= \int_a^b [g(x + iF_2(x)) - g(x + iF_1(x))] dx = -\int_C g\, dx.\end{aligned}$$

よって，(4.4) がしたがう．

ちなみに，いま得た結果と線積分に関する性質（命題 4.1）を利用すると，もっと一般の C についても (4.4) を証明することができることを注意しておこう．たとえば，D_j $(j = 1, \cdots, n)$ を，上で考えたような型の領域として，D が $D = \bigcup_{j=1}^n D_j$ と表される場合である．ただし，$j \neq k$ ならば，D_j と D_k の内部は互いに素であるとする．たとえば，一例を図 4.3 に示す．

この場合，$D = (D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup \mathrm{AM} \cup \mathrm{BM}) \setminus \{\mathrm{A}, \mathrm{M}, \mathrm{B}\}$（AB は点 A と B を結ぶ線分；BM についても同様）であり，各 D_j は上で考察した型の領域であるから，

$$\iint_D (f_x - g_y) dxdy = \sum_{j=1}^3 \iint_{D_j} (f_x - g_y) dxdy = \sum_{j=1}^3 \int_{C_j} (g\, dx + f\, dy).$$

ただし, C_j は D_j を内部とする単純閉曲線である．命題 4.1-(ii) によって, M → A という直線に沿う線積分と A → M という直線に沿う線積分は打ち消しあう．M → B と B → M についても同様．したがって，D をその内部とする単純閉曲線を C と

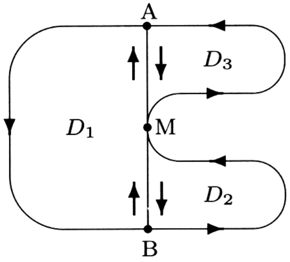


図 4.3 単純な型の領域からつくられる領域の例

すれば，$\sum_{j=1}^{3} \int_{C_j}(g\,dx + f\,dy) = \int_C (g\,dx + f\,dy)$ となる．ゆえに (4.4) が成立する．

単純閉曲線 C が一般的である場合の証明については，2 変数関数の微分積分を詳しく扱っている本を参照されたい[10)]． ∎

ガウス–グリーンの定理の簡単な応用を述べておこう．微分積分学で学ぶように，平面上の有界集合 B に対して，その**面積** $|B|$ は，B 上の定数関数 1 の面積分

$$|B| := \iint_B 1\,dxdy \tag{4.5}$$

によって定義される．

【系 4.5】 C を区分的に連続微分可能な単純閉曲線とし，その内部領域を D とする．このとき

$$|D| = \int_C x\,dy \tag{4.6}$$

$$= -\int_C y\,dx \tag{4.7}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_C x\,dy - \int_C y\,dx\right). \tag{4.8}$$

証明 (4.4) において，$f(x+iy) = x$, $g = 0$ の場合を考えると (4.6) が得られる．また，$f = 0$, $g(x+iy) = -y$ とすれば，(4.7) が出る．(4.8) は (4.6) と (4.7) を足して 2 で割れば得られる（あるいは，(4.4) で，$f(x+iy) = x/2$, $g(x+iy) = -y/2$ としてもよい）． ∎

10) たとえば，黒田成俊『微分積分』（共立出版，2002）の p.400.

! 注意 4.1　(4.6), (4.7) の符号に注意．これは C の向きが反時計回りであることによる．

■ 例 4.5 ■　任意の点 $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ を中心とする，半径 R の円 $\mathsf{C}_R(\alpha)$ を像とする単純閉曲線のひとつとして，$C(t) = \alpha + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ がとれる．この円の面積を $S_{\text{円}}$ とすれば，(4.8) によって

$$\begin{aligned} S_{\text{円}} &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} (a + R\cos t)R\cos t\,dt - \int_0^{2\pi} (b + R\sin t)(-R\sin t)dt\right) \\ &= \frac{R^2}{2}\int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)dt. \end{aligned}$$

そこで, $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ を用いれば, 積分の部分は 2π と計算されるので, $S_{\text{円}} = \pi R^2$ が得られる．したがって，$S_{\text{円}}$ は，確かに，初等幾何学で求める円の面積に一致する．

■ 例 4.6 ■　$a > 0$, $b > 0$ とし，楕円 $E : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ を考える．この楕円を像とする単純閉曲線のひとつとして，$C(t) = a\cos t + ib\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ がとれる．E の面積を S_E とすれば，(4.8) によって

$$\begin{aligned} S_E &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} (a\cos t)b\cos t\,dt - \int_0^{2\pi} (b\sin t)(-a\sin t)dt\right) \\ &= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \pi ab. \end{aligned}$$

したがって，S_E は，確かに，初等幾何学で求める楕円の面積に一致する．

4.3　複素線積分

D を $\mathbb{C}$ の領域，$f : D \to \mathbb{C}$ を連続な複素関数とする．このとき，D 内の任意の区分的に連続微分可能な曲線 $C : [a, b] \to D$ に対して，$\int_C f dz$ を

$$\int_C f\,dz := \int_C f\,dx + i\int_C f\,dy \tag{4.9}$$

によって定義し，これを曲線 C に沿う，f の**線積分**という．この型の積分を**複素線積分**という．この場合，C を**積分路**という．

【命題 4.6】　$C : [a, b] \to D$ を区分的に連続微分可能な曲線とするとき

$$\int_C f\,dz = \int_a^b f(C(t))C'(t)dt. \tag{4.10}$$

証明 $[a,b]$ 上で C が連続微分可能である場合を考えれば十分である．$C(t) = X(t) + iY(t), t \in [a,b]$ とすれば

$$\int_C f\,dx = \int_a^b f(C(t))X'(t)dt, \quad \int_C f\,dy = \int_a^b f(C(t))Y'(t)dt.$$

したがって，

$$\int_C f\,dz = \int_a^b f(C(t))(X'(t) + iY'(t))dt = \int_a^b f(C(t))C'(t)dt. \qquad \blacksquare$$

複素線積分の基本的性質は次の定理にまとめられる．

【定理 4.7】 f, g は D で連続であるとし，$C : [a,b] \to \mathbb{C}$ は D 内の区分的に連続微分可能な曲線とする．このとき，次の (i)～(iv) が成り立つ．

(i) （線形性）任意の定数 $a, b \in \mathbb{C}$ に対して

$$\int_C (af + bg)dz = a\int_C f\,dz + b\int_C g\,dz.$$

(ii) $C = C_1 \cdot C_2$（C_1, C_2 は区分的に連続微分可能な曲線）ならば

$$\int_C f\,dz = \int_{C_1} f\,dz + \int_{C_2} f\,dz.$$

(iii) C と逆向きの曲線を $-C$ とすれば，$\displaystyle\int_{-C} f\,dz = -\int_C f\,dz.$

(iv) C の像上の $|f(z)|$ の最大値を M とすれば $(M := \max_{z\in C([a,b])} |f(z)|)$，$\left|\int_C f\,dz\right| \le ML(C)$．ここで，$L(C)$ は C の長さを表す（(2.13), (2.15) を参照）．

証明 (i)～(iii) は複素線積分の定義から容易に示されるので，(iv) だけを証明する．(4.10) によって，$\left|\int_C f\,dz\right| \le \int_a^b |f(C(t))||C'(t)|dt \le M\int_a^b |C'(t)|dt$．一方，$\int_a^b |C'(t)|dt = L(C)$ である． $\blacksquare$

■ **例 4.7** ■ 実軸上の点 $r > 0$ を始点とし, 原点を中心とする半径 r の円周上の点 $re^{\pm i\theta}$ $(\theta > 0)$ を終点とする曲線を $C_{\pm\theta}$ とする．すなわち，$C_{\pm\theta}(t) = re^{\pm it}$, $t \in [0, \theta]$. n

を整数とし，関数 $1/z^n$ の，C_θ に沿う線積分を計算してみよう．$C'_\theta(t) = ire^{it}$ であるから

$$\int_{C_\theta} \frac{1}{z^n} dz = \int_0^\theta \frac{1}{r^n e^{int}} \cdot ire^{it} dt = \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^\theta e^{-i(n-1)t} dt.$$

$n = 1$ ならば $\int_0^\theta e^{-i(n-1)t} dt = \theta$．$n \neq 1$ ならば，例 2.14 によって

$$\int_0^\theta e^{-i(n-1)t} dt = \frac{i(e^{-i(n-1)\theta} - 1)}{n-1}.$$

したがって

$$\int_{C_\theta} \frac{1}{z^n} dz = \begin{cases} i\theta & ;\ n = 1 \\ \dfrac{1 - e^{-i(n-1)\theta}}{r^{n-1}(n-1)} & ;\ n \neq 1 \end{cases}. \tag{4.11}$$

これから，原点を中心とする円を反時計回りに一周する曲線 $C_{2\pi}$ に沿う，関数 $1/z^n$ の線積分は

$$\int_{C_{2\pi}} \frac{1}{z^n} dz = 2\pi i \delta_{n1} \tag{4.12}$$

となる（δ_{n1} はクロネッカーのデルタ；例 2.14 における脚注を参照）．この線積分は円の半径 r には依存しないことに注意しよう．

同様にして，$\int_{C_{-\theta}} z^{-n} dz$ は，(4.11) の右辺で θ を $-\theta$ で置き換えて得られる式によって与えられることがわかる．

4.4　コーシーの積分定理

次の定理は，複素解析の深く豊かな展開にとって基礎となる重要な定理のひとつである：

【定理 4.8】（コーシーの積分定理）　複素関数 f は領域 D 上で正則であるとする．C を D 内の区分的に連続微分可能な単純閉曲線で $C_{\mathrm{int}} \subset D$ をみたすものとする．このとき

$$\int_C f(z) dz = 0. \tag{4.13}$$

証明　f の導関数 $f'(z)$ が $F := \bar{C}_{\mathrm{int}}$ を含む領域において連続な場合についてだ

け証明を与える[11]．この場合，$f'(z) = u_x + iv_x$ であるから（定理 3.3），u_x, v_x も F で連続である．したがって，コーシー–リーマンの方程式（定理 3.3）により，u_y, v_y も F で連続である．$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$，$z = x + iy \in F$ とする．線積分の定義から

$$\int_C f(z)dz = \int_C u\,dx - \int_C v\,dy + i(\int_C v\,dx + \int_C u\,dy). \tag{4.14}$$

ガウス–グリーンの定理（定理 4.4）により，

$$\int_C u\,dx - \int_C v\,dy = \iint_{C_{\rm int}} (-u_y - v_x)dxdy,$$
$$\int_C v\,dx + \int_C u\,dy = \iint_{C_{\rm int}} (u_x - v_y)dxdy.$$

そこで，コーシー–リーマンの方程式を使えば，これらの式の右辺はいずれも 0 であることがわかる．したがって，(4.13) が成り立つ． ∎

■ **例 4.8** ■ 各自然数 n に対して，任意の n 次の多項式を $P_n(z)$ とすれば，これは $\mathbb{C}$ 上で正則である．したがって，コーシーの積分定理により，$\mathbb{C}$ 内の任意の区分的に連続微分可能な単純閉曲線 C に対して，$\int_C P_n(z)dz = 0$．さらに，任意の複素数 α と $m \in \mathbb{N}$ に対して $P_n(z)e^{\alpha z^m}$ は $\mathbb{C}$ 上で正則であるから，コーシーの積分定理により，$\mathbb{C}$ 内の任意の連続微分可能な単純閉曲線 C に対して，$\int_C P_n(z)e^{\alpha z^m}dz = 0$.

【系 4.9】 複素関数 f は領域 D で正則であるとし，D 内の 2 点 z_0, z_1 をそれぞれ，始点，終点とする D 内の 2 つの区分的に連続微分可能な単純曲線 C_1, C_2 をとる（図 4.4）．このとき，閉曲線 $C_1 \cdot (-C_2)$ の内部が D に含まれるならば

$$\int_{C_1} f\,dz = \int_{C_2} f\,dz. \tag{4.15}$$

証明 曲線 $C := C_1 \cdot (-C_2)$ は区分的に連続微分可能な単純閉曲線であり，仮定により，f は C の内部で正則である．したがって，コーシーの積分定理により，$\int_C f(z)dz = 0$．ところで，左辺は $\int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz$ に等しい．ゆえに (4.15) が成立する． ∎

[11] $f'(z)$ が D で連続でない場合の証明 —— **グルサの証明**として知られる —— は非常に長くなる [グルサ (Edouard Jean Baptiste Goursat, 1858–1936) はフランスの数学者]．この証明に興味のある読者は，たとえば，辻 正次『複素函数論』（槇書店，1968）の 4 章の 2 節や E. クライツィグ『複素関数論』（丹生慶四郎 訳，培風館，1988）の付録 4 を参照されたい．

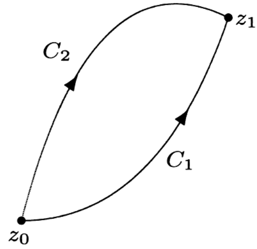


図 4.4　2 点 z_0, z_1 を結ぶ 2 つの曲線

! 注意 4.2　$C_1 \cdot (-C_2)$ の内部に D に属さない点がある場合には，(4.15) は成立するとは限らない．たとえば，例 4.7 における曲線 $C_\pi, C_{-\pi}$ から閉曲線 $C_\pi \cdot (-C_{-\pi})$ をつくると，これは原点のまわりを一周する単純閉曲線であるが，その内部に含まれる原点は，関数 $1/z$ の定義域に属さない．一方，$\int_{C_\pi} z^{-1} dz = i\pi$, $\int_{C_{-\pi}} z^{-1} dz = -i\pi$ であるから，$\int_{C_\pi} z^{-1} dz \neq \int_{C_{-\pi}} z^{-1} dz$.

コーシーの積分定理の応用として次の重要な事実が導かれる．

【定理 4.10】　D を $\mathbb{C}$ の領域とし，f は D 上で正則であるとする．C を D 内の区分的に連続微分可能な単純閉曲線とし，$C_1, \cdots, C_n$ はその像が C の内部に含まれる区分的に連続微分可能な単純閉曲線で次の性質をみたすものとする：

(i) $C_1, \cdots, C_n$ は互いに他の外部にある．すなわち，任意の相異なる j, k $(j, k = 1, \cdots, n,\ j \neq k)$ に対して，$(C_j)_{\rm int} \cap (C_k)_{\rm int} = \emptyset$.

(ii) $D_0 := \left(\bigcap_{j=1}^n (C_j)_{\rm ext}\right) \cap C_{\rm int} \subset D$（$D_0$ は，描像的には，C の内部と各 C_j の外部との共通部分を表す）.

このとき

$$\int_C f\, dz = \sum_{j=1}^n \int_{C_j} f\, dz. \tag{4.16}$$

ただし，いずれの線積分においても単純閉曲線の向きは正であるとする．

証明　各曲線 C_j 上に相異なる 2 つの点 $\mathrm{P}_j, \mathrm{Q}_j$ $(j = 1, \cdots, n)$ をとる．曲線 C 上にも相異なる 2 つの点 $\mathrm{Q}_0, \mathrm{P}_{n+1}$ をとる（図 4.5 を参照（$n = 3$ の場合））．このとき，命題 2.32 によって，各 $j = 0, \cdots, n$ に対して，Q_j を始点とし，P_{j+1} を終点

とする，D_0 内の折れ線曲線がとれる，これを L_j とする．曲線 C を，Q_0 を始点とし，P_{n+1} を終点とする部分に制限して得られる曲線を C_-（向きは反時計回り）とし，P_{n+1} を始点とし，Q_0 を終点とする部分に制限して得られる曲線を C_+（向きは反時計回り）とする．したがって，$C = C_- \cdot C_+$．同様に，$C_j = C_{j,-} \cdot C_{j,+}$ と表すことができる．ただし，$C_j(a) = C_j(c) = \mathrm{P}_j$, $C_j(b) = \mathrm{Q}_j$ $(a < b < c)$ とするとき（必要ならばパラメータ変換を行うことにより，こうしても一般性を失わない），$C_{j,-} := C_j|[a,b]$（C_j の定義域を $[a,b]$ に制限したもの），$C_{j,+} := C_j|[b,c]$ である．

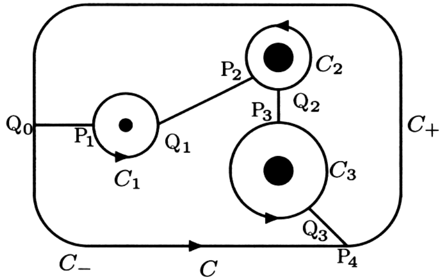


図 4.5 $n = 3$ の場合の模式図

このようにすると，D_0 内に 2 つの区分的に連続微分可能な単純曲線 $F := C_- \cdot (-L_n) \cdot (-C_{n,-}) \cdot (-L_{n-1}) \cdot (-C_{n-1,-}) \cdots (-L_1) \cdot (-C_{1,-}) \cdot (-L_0)$ と $G := L_0 \cdot (-C_{1,+}) \cdot L_1 \cdot (-C_{2,+}) \cdots (-C_{n,+}) \cdot L_n \cdot C_+$ をつくることができ，D_0 は 2 つの部分に分割される．F, G の内部は D に含まれるので，コーシーの積分定理（定理 4.8）により，$\int_F f\,dz = 0$, $\int_G f\,dz = 0$．一方

$$\int_F f\,dz = \int_{C_-} f\,dz - \sum_{j=1}^{n} \int_{C_{j,-}} f\,dz - \sum_{k=0}^{n} \int_{L_k} f\,dz,$$

$$\int_G f\,dz = \int_{C_+} f\,dz - \sum_{j=1}^{n} \int_{C_{j,+}} f\,dz + \sum_{k=0}^{n} \int_{L_k} f\,dz.$$

したがって

$$\int_{C_-} f\,dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{C_{j,-}} f\,dz + \sum_{k=0}^{n} \int_{L_k} f\,dz,$$

$$\int_{C_+} f\,dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{C_{j,+}} f\,dz - \sum_{k=0}^{n} \int_{L_k} f\,dz.$$

両辺を加えれば

$$\int_{C} f\,dz = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{C_{j,-}} f\,dz + \int_{C_{j,+}} f\,dz \right) = \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} f\,dz.$$

ゆえに (4.16) が成立する． ■

定理 4.10 においては $C_1, \cdots, C_n$ の内部に D 以外の点が含まれる場合のみが実質的な意味がある．なぜなら，もし，C_j の内部が D に含まれるならば，定理 4.8 によって，$\int_{C_j} f\,dz = 0$ だからである．要するに，定理 4.10 は，D において正則な関数の線積分が，積分路の内部に含まれる，D 以外の集合のまわりの線積分の和に帰着できることを語る．この事実は理論上も応用上も有用である．

■ **例 4.9** ■　$a \in \mathbb{C}$ を定数とするとき，任意の整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対して，関数 $1/(z-a)^n$ は $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ 上で正則である．$C^{(a)}(t) = a + re^{it}$，$t \in [0, 2\pi]$ とすれば，$C^{(a)}$ は点 a を中心とする半径 r の円を像とする，連続微分可能な単純閉曲線である．例 4.7 と同様にして

$$\int_{C^{(a)}} \frac{1}{(z-a)^n} dz = 2\pi i \delta_{n1} \tag{4.17}$$

を証明することができる．したがって，定理 4.10 を応用すれば，点 a を反時計回りに一周する任意の区分的に連続微分可能な単純閉曲線 C に対して

$$\int_{C} \frac{1}{(z-a)^n} dz = 2\pi i \delta_{n1} \tag{4.18}$$

が導かれる．

4.5　不定積分と原始関数

$\mathbb{C}$ の領域 D は，その中の任意の単純閉曲線の内部が D に含まれるとき，**単連結** (simply connected) であるという．単連結でない領域は**多重連結** (multiply connected) **な領域**とよばれる．

■ **例 4.10** ■　任意の単純閉曲線の内部は単連結である．($\because$ C を任意の単純閉曲線とし，C_1 を C_{int} にある任意の単純閉曲線とする．このとき，ジョルダンの曲線

定理により，$C_{\text{int}}, (C_1)_{\text{int}}$ はともに有界領域であり，$\mathsf{R}(C_1) \subset C_{\text{int}}$ であるから，$(C_1)_{\text{int}} \subset C_{\text{int}}$ でなければならない.）

■ **例 4.11** ■ 任意の $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ に対して，$D = \mathbb{C} \setminus \{a_1, \cdots, a_n\}$ は多重連結な領域である.（∵ たとえば，a_1 を中心とする十分小さな半径の円を像とする単純閉曲線の内部は $a_1 \notin D$ を含む.）

D を $\mathbb{C}$ の単連結領域，f を D 上の正則関数とする．z_0 を D の定点，z を D の任意の点とするとき，z_0 を始点，z_1 を終点とする，D 内の任意の区分的に連続微分可能な単純曲線 —— $C_{z_0,z}$ としよう —— に対して，複素線積分 $\int_{C_{z_0,z}} f(\zeta)d\zeta$ を考えると，系 4.9 によって，この積分は $C_{z_0,z}$ の取り方に依存しない.（∵ 同様の別の単純曲線 $\widetilde{C}_{z_0,z}$ をとると，D の単連結性により，$C_{z_0,z} \cdot (-\widetilde{C}_{z_0,z})$ の内部は D に含まれる.）したがって，対応：$z \mapsto \int_{C_{z_0,z}} f(\zeta)d\zeta$ は D 上の複素関数を定義する．この複素関数を

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

と書いて，f の**不定積分** (indefinite integral) とよぶ.

【定理 4.11】 D, f を上述のものとし，$F(z) := \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ とおく．このとき，F は D 上で正則であって

$$F'(z) = f(z), \quad z \in D \tag{4.19}$$

が成り立つ.

証明 複素数 h について $|h|$ が十分小さければ，z と $z+h$ を結ぶ線分は D 内にある．そこで，$L(t) = (1-t)z + t(z+h) = z + th, t \in [0,1]$ とおけば，これは始点が z で終点が $z+h$ の有限直線である.

$$F(z+h) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta + \int_L f(\zeta)d\zeta$$

と書けるから

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \int_L f(\zeta)d\zeta/h = \int_0^1 f(z+th)dt.$$

f は連続であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，定数 $\delta > 0$ があって，$|w| < \delta$ ならば，$|f(z+w) - f(z)| < \varepsilon$．そこで，$|h| < \delta$ とすれば，$|th| < \delta$, $t \in [0,1]$ であ

るから，$|f(z+th)-f(z)|<\varepsilon$．$f(z)=\int_0^1 f(z)dt$ に注意すれば

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)=\int_0^1 (f(z+th)-f(z))dt.$$

したがって, $|h|<\delta$ ならば

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|\le\int_0^1 |f(z+th)-f(z)|dt\le\varepsilon.$$

これは，$\lim_{h\to 0}(F(z+h)-F(z))/h$ が存在し，かつ $f(z)$ に等しいことを意味する．よって，F は微分可能であり，(4.19) が成り立つ．■

関係式 (4.19) に注目し，ある関数のクラスを導入する．

D を $\mathbb{C}$ の領域，f を D 上の正則関数とする．D 上の正則関数 G で

$$G'(z)=f(z),\quad z\in D$$

をみたすものを f の**原始関数** (primitive function) という．

定理 4.11 は，単連結領域で正則な関数の不定積分はその関数の原始関数であることを語る．

次の命題は，ひとつの正則関数の原始関数の任意性は定数差に限ることを示す：

【命題 4.12】 D を $\mathbb{C}$ の領域とし，f を D 上の正則関数とする．G, H を f の原始関数とする．このとき，複素定数 c があって，$G(z)=H(z)+c,\ z\in D$ が成り立つ．

証明　$G'(z)=f(z)=H'(z),\ z\in D$ より，$(G-H)'(z)=0$．したがって，系 3.5 によって，$G(z)-H(z)=c,\ z\in D$ となる定数 $c\in\mathbb{C}$ が存在する．■

次の定理は，単連結領域 D 上の正則関数 f の原始関数の重要性の一端を示す．

【定理 4.13】 f は単連結領域 D 上の正則関数であるとし，G をその原始関数とする．このとき，D 内の任意の区分的に連続微分可能な曲線 $C:[t_0,t_1]\to\mathbb{C}$（単純曲線である必要はない）に対して

$$\int_C f(z)dz=G(C(t_1))-G(C(t_0)).$$

特に，任意の $a, b \in D$ に対して

$$\int_a^b f(z)dz = G(b) - G(a).$$

証明 最初の主張は C が連続微分可能な場合に証明すれば十分である．線積分の定義により

$$\int_C f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f(C(t))C'(t)dt.$$

一方，
$$\frac{dG(C(t))}{dt} = G'(C(t))C'(t) = f(C(t))C'(t).$$

したがって，
$$\int_{t_0}^{t_1} f(C(t))C'(t)dt = G(C(t_1)) - G(C(t_0)).$$
■

■ **例 4.12** ■ 非負整数 $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ に対して，関数 z^n は全平面 $\mathbb{C}$ 上で正則であり，$(z^{n+1}/(n+1))' = z^n$ であるから，$z^{n+1}/(n+1)$ は z^n の原始関数である．ゆえに，任意の $a, b \in \mathbb{C}$ に対して

$$\int_a^b z^n dz = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}. \tag{4.20}$$

■ **例 4.13** ■ 関数 $1/z$ は切断平面 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ── これは単連結 ── で正則であり，$(\operatorname{Log} z)' = 1/z$（例 3.8）．したがって $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ における $1/z$ の原始関数のひとつは $\operatorname{Log} z$ である．ゆえに，任意の $a, b \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ に対して

$$\int_a^b \frac{1}{z}\, dz = \operatorname{Log} b - \operatorname{Log} a. \tag{4.21}$$

■ **例 4.14** ■ 自然数 $n \geq 2$ に対して，関数 $z^{-n} = 1/z^n$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ で正則であり，$(z^{-n+1}/(1-n))' = z^{-n}$．したがって，$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ── これは単連結ではない！ ── における z^{-n} の原始関数のひとつは $z^{-n+1}/(1-n)$ である．ゆえに，$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ に含まれる任意の単連結領域 D に属するすべての点 a, b に対して

$$\int_a^b \frac{1}{z^n}\, dz = \frac{b^{-n+1} - a^{-n+1}}{1-n}. \tag{4.22}$$

次の系は，単連結領域上の正則関数については，コーシーの積分定理を成立させる閉曲線のクラスが若干広がることを語る．

【系 4.14】　f は単連結領域 D で正則であるとする．このとき，D 内の任意の区分的に連続微分可能な閉曲線 C（単純閉曲線である必要はない）に対して

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

証明　関数 F を定理 4.11 のものとすれば，これは f の原始関数である．したがって，定理 4.13 によって，$\int_C f(z)dz = F(C(t_1)) - F(C(t_0))$（$C : [t_0, t_1] \to D$ とする）．しかし，$C(t_0) = C(t_1)$ であるから，右辺は 0 である．■

4.6　不定積分の応用：与えられた調和関数を実部とする正則関数の存在

正則関数の不定積分の重要な応用のひとつが，次の定理によって与えられる．

【定理 4.15】　単連結領域 D 上の任意の 2 回連続微分可能な実調和関数（実数値の調和関数）$u(x,y)$ に対して，D 上の正則関数 $f(z)$ で $\mathrm{Re}\, f(z) = u(x,y)$, $z = x + iy \in D$ をみたすものが存在する．

証明　$g(z) := u_x(x,y) - iu_y(x,y)$ とおくと，定理 3.10 によって，g は D 上で正則である．そこで，$g(z)$ の不定積分を $G(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ $(U(x,y) := \mathrm{Re}\, G(z), V(x,y) := \mathrm{Im}\, G(z))$ とすれば，G は正則であり，$G'(z) = g(z)$ が成り立つ．一方，$G'(z) = U_x(x,y) + iV_x(x,y)$．ゆえに，$U_x = u_x, -u_y = V_x$．第 1 式から，$u(x,y) = U(x,y) + c(y)$（$c(y)$ は y のみの関数）．これと第 2 式から，$U_y(x,y) + c'(y) = -V_x(x,y)$．コーシー–リーマンの方程式により，$U_y = -V_x$ であるから，$c'(y) = 0$．したがって，$c(y) = c$（定数）．ゆえに，$U(x,y) = u(x,y) - c$．そこで，$f(z) := u(x,y) + iV(x,y)$ とおけば $(f(z) = G(z) + c)$，これが求める正則関数のひとつである．■

【系 4.16】　単連結領域 D 上の任意の 2 回連続微分可能な実調和関数 $u(x,y)$ に対して，$u(x,y)$ と共役な調和関数 $v(x,y)$ が存在する．

証明　定理 4.15 の正則関数 $f(z)$ の虚部を $v(x,y)$ とすればよい．■

この結果は，2 次元調和関数の集合のもつ調和的な構造のひとつを表す．

4.7 コーシーの積分表示

正則関数の解析にとって重要な基礎のひとつをなす定理を証明しよう．

【定理 4.17】(コーシーの積分表示) f を領域 D で正則な関数とし，C を D 内の区分的に連続微分可能な単純閉曲線で $C_{\rm int} \subset D$ とする．このとき，任意の点 $z \in C_{\rm int}$ に対して

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \tag{4.23}$$

が成り立つ．

証明 $z \in C_{\rm int}$ を 1 つ固定するとき，ζ の関数 $f(\zeta)/(\zeta - z)$ は $C_{\rm int} \setminus \{z\}$ で正則である．$C_{\rm int}$ は開集合であるから，ある正数 ε_0 があって，$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ならば，z を中心とする半径 ε の円は $C_{\rm int}$ に含まれる．この円を反時計回りに一周する曲線を R_ε とすれば，定理 4.10 によって，$\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \int_{R_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$．したがって，$\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{R_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$．さて，$R_\varepsilon(t) = z + \varepsilon e^{it}$，　$t \in [0, 2\pi]$ とすれば（$R'_\varepsilon(t) = i\,e^{it}$ に注意）

$$\int_{R_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = i\int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{it})dt.$$

定理 4.11 の証明の中で行った極限に関する議論と同様にして $\lim_{\varepsilon \to 0}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{it})dt = 2\pi f(z)$ が証明される．以上をまとめれば，$\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = 2\pi i f(z)$．したがって，(4.23) が得られる． ∎

式 (4.23) は**コーシーの積分表示**とよばれる．これは，正則関数 f の点 z における値 $f(z)$ が，自らが定める単純な形の複素関数 : $\zeta \mapsto f(\zeta)/(\zeta - z)$ の線積分を用いて“復元”されることを表す式であり，理論上も応用上も極めて重要な式である．

コーシーの積分表示の応用として，次の重要な事実が導かれる．

【定理 4.18】 f を領域 D で正則な関数とし，C を D 内の区分的に連続微分可能な単純閉曲線で $C_{\rm int} \subset D$ とする．このとき，任意の点 $z \in C_{\rm int}$ に対して

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta \tag{4.24}$$

が成り立つ[12)].

証明　点 $z \in C_{\rm int}$ に対して $|h|$ が十分小ならば，$z + h \in C_{\rm int}$ であるから，コーシーの積分表示により

$$f(z) = (2\pi i)^{-1}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \quad f(z+h) = (2\pi i)^{-1}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z - h}d\zeta.$$

したがって

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}d\zeta.$$

一方

$$\frac{1}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} - \frac{1}{(\zeta - z)^2} = \frac{h}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2}.$$

したがって

$$I_h := \frac{h}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2}d\zeta$$

とおけば

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta + I_h. \tag{4.25}$$

ζ の関数 $g_h(\zeta) := f(\zeta)/[(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2]$ は C 上で連続であるので，定理 4.7-(iv) によって

$$|I_h| \leq (2\pi)^{-1}|h|(\max_{\zeta \in C([a,b])} |g_h(\zeta)|)L(C)$$

が成り立つ．ただし，C の定義域を $[a, b]$ とし，$L(C)$ は C の長さを表す．$M := \sup_{\zeta \in C} |f(\zeta)|$, $d := \inf_{\zeta \in C} |\zeta - z|$ とすれば，$M < +\infty$, $d > 0$ であり，$|h| \leq c < d$, $\zeta \in C$ ならば

$$|g_h(z)| = \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z - h||\zeta - z|^2} \leq \frac{M}{(d - c)d^2}$$

---

12) コーシーの積分表示 (4.23) の右辺において，z に関する微分と積分 $\int_C(\cdot)d\zeta$ を形式的に交換し，$\dfrac{d}{dz}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$ を用いれば，式 (4.24) が出る．だが，これは証明ではないことに注意しなければならない．（微分積分学で，すでに学んでいると思うが，微分と積分の順序交換はつねに可能であるとは限らない．）この形式的計算はあくまで発見法的なもの（見当をつけるためのもの）である．

が成り立つ．($|\zeta - z| \geq d$, $|\zeta - z - h| \geq |\zeta - z| - |h| \geq d - c$ に注意．) したがって $|I_h| \leq (2\pi)^{-1}|h|L(C)M/[(d-c)d^2]$, $|h| \leq c$ であるので，$\lim_{h\to 0} I_h = 0$. そこで，(4.25) において，$h \to 0$ の極限をとれば (4.24) が得られる． ■

式 (4.24) は，正則関数 f の導関数も f だけを用いて "復元" できること ── しかも簡素で美しい形で ── を示しており，実に驚くべき事実である．

領域 D 上の正則関数 f について，f' が D 上で正則，すなわち，微分可能であるとき，f は **2 回微分可能**であるといい，f' の導関数を

$$f''(z) = f^{(2)}(z) = \frac{d^2}{dz^2}f(z) = \frac{d^2 f(z)}{dz^2}$$

のように表す．同様に，f'' が D 上で微分可能ならば，f は D 上で **3 回微分可能**であるといい，f'' の導関数を

$$f'''(z) = f^{(3)}(z) = \frac{d^3}{dz^3}f(z) = \frac{d^3 f(z)}{dz^3}$$

のように記す．以下，同様にして，f の D 上での $\boldsymbol{n}$ **回微分可能性**の概念が帰納的に定義される．D 上で n 回微分可能な関数 f の導関数を

$$f^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n}f(z) = \frac{d^n f(z)}{dz^n}$$

のように表す．定義によって

$$f^{(n)}(z) = \frac{d}{dz}f^{(n-1)}(z), \quad n \in \mathbb{N}$$

である ($f^{(0)} := f$)．D 上の関数 f が任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して D 上で微分可能であるとき，f は D 上で**無限回微分可能**であるという．

定理 4.18 を用いると，実は，次の事実が見出される：

【系 4.19】 f を領域 D で正則な関数とする．このとき，f は D 上で無限回微分可能であり，任意の $z \in D$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta \tag{4.26}$$

が成り立つ．ただし，C は $z \in C_{\rm int}$ かつ $C_{\rm int} \subset D$ をみたす任意の区分的に連続微分可能な単純閉曲線である．したがって，特に，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$f^{(n)}$ は D 上で正則かつ連続である．

証明　各 $z \in D$ に対して，$z \in C_{\text{int}}$ かつ $C_{\text{int}} \subset D$ となる区分的に連続微分可能な単純閉曲線を C とする．このとき，定理 4.18 によって

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta.$$

この表示を用いて，定理 4.18 の証明と同様な方法で $(f'(z+h) - f'(z))/h$（$|h|$ は十分小）を計算し，$h \to 0$ の極限を考察すれば，$f'(z)$ は点 z で微分可能であり

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3}d\zeta$$

が得られる．以下，n に関する帰納法により，題意が示される．

正則な関数は連続であるから，$f^{(n+1)}$ の存在は，$f^{(n)}$ の正則性と連続性を導く．■

系 4.19 ── **グルサの定理**として言及される場合がある ── は，複素関数については，**1 回の微分可能性が無限回の微分可能性を内蔵している**ことを示している．実変数の関数の場合，微分可能であっても，その導関数の連続性や微分可能性は保証されないことを想起するならば，正則関数のこの性質は，まことに驚くべき性質である．これは，複素関数の正則性という性質がいかに強い条件であるかを物語る事実のひとつである．

系 4.19 から，正則関数の導関数について次の有用な評価が得られる．

【定理 4.20】（コーシーの評価式）　$a \in \mathbb{C}$ を定点とし，関数 f は $|z - a| < R$（$R > 0$ は定数）で正則であるとする[13]．このとき，任意の $r \in (0, R)$ に対して

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n}\max_{|z-a|=r}|f(z)|. \tag{4.27}$$

証明　(4.26) において，C として，$C(t) = a + re^{it}$，$t \in [0, 2\pi]$ という曲線をとると

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(a + re^{it})}{r^n e^{int}}dt. \tag{4.28}$$

したがって

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\max_{|\zeta-a|=r}|f(\zeta)|\right)\frac{1}{r^n}dt.$$

ゆえに (4.27) が出る．■

---

[13] これは，「f が $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < R\}$ 上で正則」という意味である．以下，しばしば，このような簡潔な言いまわしを使う．

系 4.19 を応用すると，コーシーの積分定理のある意味での逆を証明することができる．そのために，曲線のクラスを 1 つ導入する．

矩形（長方形）の周を像とする単純閉曲線を**矩形閉曲線**とよぶ．特に，矩形の各辺が実軸または虚軸に平行である場合の矩形閉曲線を**平行矩形閉曲線**とよぶ．

【定理 4.21】（モレラの定理[14)]） f を開集合 D 上で連続な関数とし，各点 $z_0 \in D$ に対して，z_0 の近傍 $U(z_0) \subset D$ があって，$U(z_0)$ 内の任意の平行矩形閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z)dz = 0$$

とする．このとき，f は D 上で正則である．

証明 $U(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}$ とし，$z_0 = x_0 + iy_0$ とおく．$a < x_0,\ b < y_0$ かつ $\alpha = a + ib \in U(z_0)$ となる複素数 α を 1 つ固定する．このとき，z_0 の十分小さい近傍にある任意の $z = x + iy$ に対して，有限直線 L_1, L_2, L_3, L_4 を次のように定義できる: $L_1(t) := t + ib, t \in [a, x], L_2(s) := x + is, s \in [b, y], L_3(t) := a + is, s \in [b, y], L_4(t) = t + iy, t \in [a, x]$. $C_- := L_1 \cdot L_2, C_+ := L_3 \cdot L_4$ とおけば，$C_\pm$ は始点が α で終点が z の折れ線であり，$C := C_- \cdot (-C_+)$ は $U(z_0)$ 内の平行矩形閉曲線である（図 4.6）．

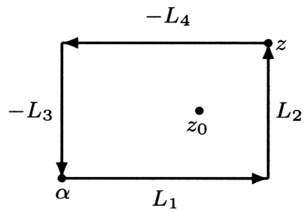


図 4.6 平行矩形曲線 C

したがって，仮定により，$\int_C f(\zeta)d\zeta = 0$. これは

$$\int_{C_-} f(\zeta)d\zeta = \int_{C_+} f(\zeta)d\zeta \quad \cdots (*)$$

---

14) Giancinto Morera (1856–1909).

を意味する．この共通の値を $F(z)$ と書く．その絶対値が十分小さい実数 $\eta \neq 0$ に対して，$F(z+\eta) - F(z)$ を，$(*)$ の右辺を使って計算すると

$$\frac{F(z+\eta) - F(z)}{\eta} = \frac{1}{\eta}\int_x^{x+\eta} f(x'+iy)dx'.$$

f は連続であるから，通常の微分積分学の定理により，右辺は，$\eta \to 0$ のとき，$f(x+iy) = f(z)$ に収束する．したがって，F は点 z で x について偏微分可能であり

$$\partial_x F(z) = f(z) \quad \cdots (**).$$

次に，$F(z+i\eta) - F(z)$ を，$(*)$ の左辺を用いて計算すると

$$\frac{F(z+i\eta) - F(z)}{\eta} = \frac{i}{\eta}\int_y^{y+\eta} f(x+iy')dy' \to if(z) \quad (\eta \to 0).$$

したがって，F は点 z で y について偏微分可能であり，$\partial_y F(z) = if(z)$．以上から，$\partial_x F(z) = -i\partial_y F(z)$．これと，第 3 章の演習問題 1 により，$F$ は z_0 の十分小さな近傍で正則である．したがって，また，$(**)$ は $F'(z) = f(z)$ を意味する．ゆえに，系 4.19 によって，f も z_0 のある近傍で正則である．$z_0 \in D$ は任意であったから，f は D 上で正則であることが結論される．∎

4.8　リウヴィルの定理と代数学の基本定理

$\mathbb{C}$ 全体で正則な関数は**整関数** (entire function) とよばれる．

整関数については，次の重要な事実が導かれる：

【定理 4.22】(リウヴィルの定理[15])　有界な整関数は定数である．すなわち，整関数 f について，定数 $M > 0$ があって $|f(z)| \leq M, \forall z \in \mathbb{C}$ が成り立つならば，f は定数である．

証明　z を $\mathbb{C}$ の任意の点とし，$R > 2|z|$ をみたす $R > 0$ をとる．原点を中心とする半径 R の円を像とする曲線 $C(t) = Re^{it}, t \in [0, 2\pi]$ をとる．このとき，仮定

[15] Joseph Liouville (1809–1882)．フランスの数学者（リューヴィルまたはリウヴィユと書かれる場合もある）．パリ理工科大学教授，コレジュ・ド・フランス教授，パリ大学数学および力学教授を歴任．Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 誌を創刊．

により，f は，もちろん，$C_{\rm int}$ で正則であるから，コーシーの積分表示により

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \quad f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta.$$

したがって

$$f(z) - f(0) = \frac{z}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)}d\zeta = \frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})}{Re^{it} - z}dt$$

となる．ここで，$|Re^{it} - z| \geq R - |z| > R/2$ に注意すれば，$|f(z) - f(0)| \leq |z|M/(R\pi)$．そこで，$R \to \infty$ の極限をとれば，右辺は 0 に収束するので，$|f(z) - f(0)| = 0$，すなわち，$f(z) = f(0)$．よって，f は定数である． ∎

リウヴィルの定理も正則性という強い条件の現れのひとつである．$\mathbb{R}$ 上の関数の場合，微分可能で有界であっても，定数とは限らないことを想起されたい．

リウヴィルの定理から次のことがただちにわかる（対偶をとればよい）．

【系 4.23】 定数でない整関数は $\mathbb{C}$ 上で非有界である．

■ **例 4.15** ■ 任意の自然数 n に対して，n 次の多項式は定数でない整関数であるので，$\mathbb{C}$ 上で非有界である．

■ **例 4.16** ■ 指数関数 $e^{\alpha z}$（$\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ は定数）は定数でない整関数であるので，$\mathbb{C}$ 上で非有界である．

■ **例 4.17** ■ 3 角関数 $\sin z, \cos z$ はいずれも定数でない整関数であるので，$\mathbb{C}$ 上で非有界である．実変数 $x \in \mathbb{R}$ の 3 角関数 $\sin x, \cos x$ との違いに注意 ($|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$)．

リウヴィルの定理を応用することにより，代数学の基本定理が導かれる：

【定理 4.24】（代数学の基本定理） 複素定数 $a_0, \cdots, a_n$ ($a_n \neq 0$) から決まる n 次方程式

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 \tag{4.29}$$

は複素数の範囲で少なくとも 1 つの根をもつ．(i.e.，(4.29) をみたす複素数 z は少なくとも 1 つ存在する.)

証明　$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ とおく．このとき，f は整関数である．仮に，$f(z) = 0$ となる $z \in \mathbb{C}$ が存在しないとすれば，$f(z) \neq 0, z \in \mathbb{C}$ であるから，$F(z) := 1/f(z)$ は整関数である．3 角不等式により，

$$|f(z)| \geq |a_n||z|^n - \sum_{j=0}^{n-1} |a_j||z|^j = |z|^n \left(|a_n| - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{|z|^{n-j}} \right).$$

したがって, $|f(z)| \to +\infty \ (|z| \to +\infty)$．ゆえに, $|F(z)| \to 0 \ (|z| \to +\infty) \cdots (*)$．これは，$F$ が有界であることを意味する．（∵ $(*)$ は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，正数 $R_\varepsilon > 0$ があって，$|z| > R_\varepsilon$ ならば $|F(z)| < \varepsilon$ ということである．$M_\varepsilon = \sup_{|z| \leq R_\varepsilon} |F(z)|$ とすれば，M_ε は有限である．そこで，$M = \max\{\varepsilon, M_\varepsilon\}$ とすれば，$|F(z)| \leq M, z \in \mathbb{C}$.）よって，リウヴィルの定理により，$F(z) = c$（定数）．だが，$(*)$ によって，$c = 0$．すなわち，$F(z) = 0, z \in \mathbb{C}$．これは明らかに矛盾である． ∎

【系 4.25】　n を任意の自然数とし，$P_n(z)$ を任意の n 次の多項式とする．$P_n(z)$ における z^n の係数を a_n とする．このとき，n 個の複素数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$（ただし，これらは互いに異なるとは限らない）があって

$$P_n(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n) = a_n \prod_{j=1}^{n} (z - \alpha_j) \tag{4.30}$$

が成り立つ．したがって，特に，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ は n 次方程式 $P_n(z) = 0$ の根であり，これ以外に根はない．

証明　n に関する帰納法による．$n = 1$ の場合，$P_1(z) = az + b$（$a \neq 0, b$ は定数）であるから，$\alpha_1 = -b/a$ とおけば $P_1(z) = a(z - \alpha_1)$ と書ける．したがって，$n = 1$ の場合の主張は成立する．

次に，定理の主張が $n = N$ で成立したとする．定理 4.24 によって，$P_{N+1}(\alpha_1) = 0$ となる $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ が存在する．したがって，因数定理（第 1 章演習問題 21）によって，$P_{N+1}(z) = (z - \alpha_1) Q_N(z) \cdots (*)$ と書ける．ただし，Q_N は N 次の多項式である．すると帰納法の仮定により，$Q_N(z)$ は，$Q_N(z) = c_N \prod_{j=1}^{N} (z - \beta_j)$ という形に書ける．ただし，$c_N \neq 0$ は $Q_N(z)$ における z^N の係数，$\beta_1, \cdots, \beta_N$ は複素数である（ただし，互いに異なるとは限らない）．$(*)$ の両辺の z^N の係数比

較により，$c_N = a_{N+1}$．そこで，$\alpha_j := \beta_{j+1}$ とおけば，(4.30) で $n = N+1$ が成立する．ゆえに，定理の主張は $n = N+1$ でも成立する．

(4.30) から，$P_n(\alpha_j) = 0$．したがって，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ は n 次方程式 $P_n(z) = 0$ の根である．逆に，β を $P_n(z) = 0$ の任意の根とすれば，$P_n(\beta) = 0$．したがって，(4.30) によって，$(\beta - \alpha_1) \cdots (\beta - \alpha_n) = 0$．ゆえに，ある j $(1 \leq j \leq n)$ に対して，$\beta = \alpha_j$．よって，$P_n(z) = 0$ の根全体の集合は，集合 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ に等しい．■

この系の中の最後に述べられた事実は，言葉で簡潔に述べるならば，「**n 次方程式は，重複を含めて n 個の根をもつ**」ということである．

4.9　最大値の原理とシュヴァルツの補題

次の重要な定理もコーシーの積分表示の応用から導かれる．

【定理 4.26】(最大値の原理)　f を領域 D において正則な関数とする．もし，絶対値 $|f(z)|$ が D 上の関数として D 内の点 $a \in D$ において最大になるならば (i.e., $\sup_{z \in D} |f(z)| = |f(a)|$)，$f$ は D 上で定数である．(i.e., ある定数 $c \in \mathbb{C}$ があって，$f(z) = c$, $z \in D$.)

証明　$M := \sup_{z \in D} |f(z)|$ とおき，$|f(a)| = M$ とする．D は開集合であるから，正数 δ があって，$\overline{U_\delta(a)} \subset D$．任意の $0 < r < \delta$ に対して，$U_\delta(a)$ 内の曲線 C を $C(t) := a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ によって定義する．コーシーの積分表示により

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

したがって，

$$I_f := (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{it})| dt$$

とおけば，$M = |f(a)| \leq I_f$．一方，M の定義から，当然，$|f(a + re^{it})| \leq M$ であるから

$$I_f \leq (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} M dt = M.$$

ゆえに，$M \le I_f \le M$ となるので，$I_f = M$．これは

$$(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\left(M - |f(a+re^{it})|\right)dt = 0$$

と同値である．左辺の非積分関数は非負であるから，$M - |f(a+re^{it})| = 0$ でなければならない．ゆえに，$|f(z)| = M$, $|z-a| = r$．これが任意の $r \in (0,\delta)$ に対して成り立つから，$M = |f(z)|$, $z \in U_\delta(a)$ となる．これと系 3.7 によって，定数 c があって，$f(z) = c$, $z \in U_\delta(a)$ が成り立つ．したがって，$|c| = M$ である．f の連続性により，$f(z) = c$, $z \in \overline{U_\delta(a)} \cdots (*)$．

次に $b \in D$ を a とは異なる任意の点として，$f(b) = c$ を示そう．$b \in \overline{U_\delta(a)}$ ならば，$(*)$ より，これは自明．そこで，$b \notin \overline{U_\delta(a)}$ の場合を考える．D の弧状連結性により，a を始点とし，b を終点とする曲線 $C : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ $(t_0, t_1 \in \mathbb{R}, t_0 < t_1)$ が D の内部にとれる $(C(t) \in D,\ \forall t \in [t_0, t_1])$．いまの場合，$|C(t) - a| = \delta$ をみたす点 $t \in [t_0, t_1)$ がある．そのような t のうちで最小のものを $t_{\min}$ とすれば，$t_0 < t_{\min} < t_1$ かつ $C(t) \in \overline{U_\delta(a)}, t \in [t_0, t_{\min}]$．$(*)$ によって，$f(C(t)) = c$, $t \in [t_0, t_{\min}]$．したがって，$T := \sup\{\tau \in [t_0, t_1] \mid f(C(t)) = c, t \in [t_0, \tau]\}$ とおけば，$T \ge t_{\min}$．$T = t_1$ を示そう．そのために，$T < t_1$ として矛盾を導く．f の連続性により，$f(C(T)) = c$．したがって，$|f(C(T))| = |c| = M$ であるから，前段の議論は，a のところを $C(T)$ に替えても成立する．ゆえに，ある正数 $\delta_0 > 0$ と定数 $c_0 \in \mathbb{C}$ があって，$|z - C(T)| < \delta_0$ ならば，$z \in D$ かつ $f(z) = c_0$．だが，$f(C(T)) = c$ であるから，$c_0 = c$ でなければならない．$T < t_1$ と C の連続性により，定数 $\varepsilon_0 > 0$ があって，$0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ ならば $T + \varepsilon \le t_1$ かつ $|C(T+\varepsilon) - C(T)| < \delta_0$ が成立する．すると $f(C(T+\varepsilon)) = c_0 = c$, $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$．したがって，$f(C(t)) = c$, $\forall t \in [t_0, T+\varepsilon_0]$．だが，これは T の定義と矛盾する．ゆえに，$T = t_1$ でなければならない．したがって，$f(b) = f(C(T)) = c$．$b \in D$ は任意であったから，これは，$f(z)$ が D 全体で定数 c に等しいことを示す．　■

定理 4.26 の対偶をとれば，「**領域 D 上の正則関数 f が定数でないならば，$|f|$ は D の内部では最大にならない**」という事実を得る．

【系 4.27】　領域 D は有界であるとし，D の境界を ∂D とする．f が D で正則で $D \cup \partial D$ で連続ならば，$|f(z)|$ は ∂D 上の点で最大値をとる．(i.e., ある $z_0 \in \partial D$ があって，$\max_{z \in D \cup \partial D} |f(z)| = |f(z_0)|$.）

証明 $D \cup \partial D$ は有界閉集合であり，$|f(z)|$ は，この集合上で連続であるから，$M := \max_{z \in D \cup \partial D} |f(z)|$ は存在し，$|f(z_0)| = M$ をみたす $z_0 \in D \cup \partial D$ がある．次の 2 つの場合がありうる：(i) $z_0 \in \partial D$; (ii) $z_0 \in D$．前者の場合は，題意そのものである．そこで，(ii) の場合を考え，$z_0 \in D$ とする．このとき，最大値の原理により，$|f(z)| = M, z \in D$ が成り立つ．$\partial D = \bar{D} \setminus D$ であるから（命題 2.20-(i)），任意の $\xi \in \partial D$ に対して，$z_n \to \xi$ $(n \to \infty)$ となる点列 $z_n \in D$ がとれる．$|f|$ の $D \cup \partial D$ における連続性により，$|f(z_n)| \to |f(\xi)|$ $(n \to \infty)$．したがって，$|f(\xi)| = M$．ゆえに題意が成立する． ∎

この系は有界閉領域上の正則関数の絶対値の最大値を求めるのに有用である．

■ 例 4.18 ■ 関数 $f(z) = z^n + z$ を考える $(n \geq 2, n \in \mathbb{N})$．これは整関数である．$R > 0$ を任意に固定する．このとき，$|f(z)|$ の $|z| \leq R$ における最大値とそれを実現する点を求めよ．

解 $|z| < R$ では，f は正則で，$|z| \leq R$ で連続である．したがって，系 4.27 によって，$|f(z)|$ は半径 R の円周 ($|z| = R$) 上で最大値をとる．そこで，$z = Re^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ とする．$f(z) = z(z^{n-1} + 1)$ であるから

$$|f(z)| = |z||z^{n-1} + 1| = R\,|R^{n-1}e^{i(n-1)\theta} + 1|.$$

容易に証明される公式

$$|ke^{it} + 1| = \sqrt{k^2 + 2k\cos t + 1}, \quad k > 0, t \in \mathbb{R} \tag{4.31}$$

を用いると

$$|f(z)| = R\sqrt{R^{2(n-1)} + 2R^{n-1}\cos[(n-1)\theta] + 1}.$$

これが最大になるのは，$\cos[(n-1)\theta] = 1$ になるときであり，その値は $R(R^{n-1} + 1)$ である．ゆえに，$|f(z)|$ の $|z| \leq R$ における最大値は $R(R^{n-1} + 1)$ であり，これを実現する点は，$Re^{i2\pi\ell/(n-1)}, \ell = 0, 1, \cdots, n-2$ である． ∎

最大値の原理の応用のひとつをあげておく．

【定理 4.28】（シュヴァルツの補題[16]） $R > 0$ を定数とする．関数 $f(z)$ は $|z| < R$ で正則であり，$f(0) = 0$ かつ $|f(z)| \leq M$ $(|z| < R)$ (M は定数）をみたすとする．

---

[16] Hermann Amandus Schwarz (1843–1921)．ドイツの数学者．ハレ大学，チューリッヒ大学，ゲッティンゲン大学，ベルリン大学の教授を歴任．複素解析学の発展に大きな貢献をした．

(i) すべての $z \in \mathbb{C}, |z| < R$ に対して

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z| \tag{4.32}$$

が成り立つ.

(ii) 不等式 (4.32) において，$0 < |z_0| < R$ をみたす点 z_0 で等号が成立するならば, f は，ある実定数 θ を用いて

$$f(z) = \frac{M}{R}e^{i\theta}z \tag{4.33}$$

と表される.

証明　(i) 関数 $f(z)/z$ は領域 $A_R := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < R\}$ で正則である. $f(0) = 0$ であるから, $f(h)/h = (f(h) - f(0))/h$. したがって, $\lim_{h\to 0} f(h)/h = f'(0)$. 任意の $\varepsilon \in (0, R)$ に対して，$\partial A_{R-\varepsilon} = \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R - \varepsilon\}$ であるから，系 4.27 によって

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \max\left\{|f'(0)|, \sup_{|\zeta|=R-\varepsilon} |f(\zeta)/\zeta|\right\} \leq \max\{|f'(0)|,\ M/(R-\varepsilon)\}.$$

他方，コーシーの評価式（定理 4.20）によって，任意の $r \in (0, R)$ に対して, $|f'(0)| \leq M/r$. そこで，$r \to R$ の極限をとれば $|f'(0)| \leq M/R$. したがって, $|f(z)/z| \leq M/(R-\varepsilon)$. そこで，$\varepsilon \to 0$ とすれば，$|f(z)/z| \leq M/R$ が得られる. ゆえに (4.32) が成り立つ.

(ii) 仮定により，$|f(z_0)| = M|z_0|/R$. これは，関数 $f(z)/z$ が z_0 で最大値をとることを意味するので，最大値の原理により，$f(z)/z = c$（定数）. したがって, $f(z) = cz$. さらに，$z = z_0$ の場合を考えると $|c| = M/R$ であるから，実定数 θ があって，$c = (M/R)e^{i\theta}$ と書ける. ゆえに (4.33) が成り立つ. ∎

4.10　シュヴァルツの鏡像原理と解析接続

複素平面 $\mathbb{C}$ の部分集合 D に対して，D の各点を実軸に関する鏡映（例 1.8）によって写して得られる点の集合

$$D^* := \{z^* \mid z \in D\} \tag{4.34}$$

が同伴する．D が上半平面の部分集合であれば，D^* は下半平面の部分集合であり，D が下半平面の部分集合であれば，D^* は上半平面の部分集合である．いずれの場合にも，D^* は，幾何学的な描像では，D を実軸に関して，鏡映したものである．このゆえに，D^* を，**実軸に関する D の鏡像**とよぶ．明らかに，$(D^*)^* = D$.

次の定理は，関数の正則性と実軸に関する鏡映に関わる重要な性質を明らかにするものである：

【定理 4.29】（シュヴァルツの鏡像原理） D を実軸上の開区間 $I = (a,b)$ $(a < b)$ をその境界の一部とする上半平面または下半平面の領域とし，$D \cup I \cup D^*$ も領域であるとする．複素関数 $f : D \cup I \to \mathbb{C}$ は次の性質をもつとする：(f.1) f は D 上で正則；(f.2) f は $D \cup I$ で連続；(f.3) f は I 上では実数値をとる．このとき

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & ; \ z \in D \cup I \\ f(z^*)^* & ; \ z \in D^* \end{cases}$$

によって定義される，$D \cup I \cup D^*$ 上の関数 F は正則である．

証明 F が D で正則であることは定義から明らか．

F が D^* 上で正則であることを示すために，$z \in D^*$ としよう．このとき

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \left(\frac{f(z^* + h^*) - f(z^*)}{h^*} \right)^* .$$

$z^* \in D$ であるから，$\lim_{h^* \to 0}(f(z^* + h^*) - f(z^*))/h^* = f'(z^*)$．したがって，$F$ は点 z において微分可能であり，$F'(z) = f'(z^*)^*$.

最後に F が I の点を含む近傍で正則であることを示そう．そのために，$x_0 \in I$ を任意にとる．f の $D \cup I$ 上での連続性により，F も $D \cup I$ 上で連続である．$|h|$ $(h \in \mathbb{C}$，$\mathrm{Im}\, h < 0)$ を十分小にとるとき，$x_0 + h^* \in D$ であり，$F(x_0 + h) = f(x_0 + h^*)^*$．$f$ の $D \cup I$ 上での連続性により，右辺は，$h \to 0$ のとき，$f(x_0)^*$ に収束する．I 上では f は実数値であるから，$f(x_0)^* = f(x_0) = F(x_0)$．したがって，$\lim_{\mathrm{Im}\, h<0, h\to 0} F(x_0 + h) = F(x_0)$．ゆえに，$F$ は $D \cup I \cup D^*$ で連続である．

x_0 の近傍 U で $U \subset D \cup I \cup D^*$ となるものをとり，U 内の任意の平行矩形閉曲線を C とする．C の内部および周が D に含まれるならば，正則性とコーシーの積分定理により，$\int_C F(z)dz = 0$．また，C の内部および周が D^* 内に含まれる

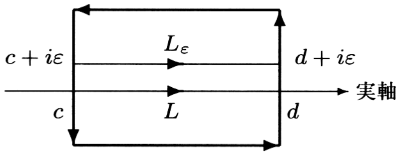


図 4.7　証明のための平行矩形閉曲線

ならば，前々段の結果により，$\int_C F(z)dz = 0$．そこで，C が D と D^* の両方にまたがる場合を考える．C が実軸と交わる点を $c, d, c < d$ とし，c から d へといたる有限直線を L とする（図 4.7）．また，点 d を始点とし，C の像の上半平面における部分を通って点 c にいたる曲線を C_1，c を始点とし，C の像の下半平面における部分を通って d にいたる曲線を C_2 とする $(C = C_1 \cdot C_2)$．$C_+ := L \cdot C_1$，$C_- := C_2 \cdot (-L)$ とおく．このとき

$$\int_C F(z)dz = \int_{C_+} F(z)dz + \int_{C_-} F(z)dz$$

が成立する．（$\because \int_L F(z)dz + \int_{-L} F(z)dz = 0$ に注意.）

一方，$\varepsilon > 0$ に対して，L_ε を点 $c+i\varepsilon$ から $d+i\varepsilon$ に向かう有限直線，$C_{1,\varepsilon}$ を C_1 の制限で $\mathsf{R}(C_{1,\varepsilon}) = \mathsf{R}(C_1) \setminus [\{d+iy \mid 0 < y < \varepsilon\} \cup \{c+iy \mid 0 < y < \varepsilon\}]$ となるものとし，$C_{+,\varepsilon} := L_\varepsilon \cdot C_{1,\varepsilon}$ とすれば，コーシーの積分定理により，$\int_{C_{+,\varepsilon}} F(z)dz = 0$．一方

$$\int_{L_\varepsilon} F(z)dz = \int_c^d f(x+i\varepsilon)dx \to \int_c^d f(x)dx \quad (\varepsilon \to 0).$$

したがって

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_{+,\varepsilon}} F(z)dz = \int_{C_+} F(z)dz$$

（積分路を分けて考えよ）．ゆえに，$\int_{C_+} F(z)dz = 0$．同様に，$\int_{C_-} F(z)dz = 0$．よって，$\int_C F(z)dz = 0$．以上から，関数 F に対して，モレラの定理（定理 4.21）を応用できるので，F は $D \cup I \cup D^*$ 上で正則である．　■

シュヴァルツの鏡像原理は，上半平面（または下半平面）の領域 D で正則な関数の定義域を，関数の正則性を保ちつつ，実軸に関して D と対称な D^* まで拡大する方法のひとつを示している．

一般に，複素平面の１つの領域で定義された正則関数を，正則性を失わないようにして，もっと広い領域へと拡大していくことを**解析接続** (analytic continuation) とよぶ．

シュヴァルツの鏡像原理は解析接続の一般的な方法のひとつを与える．解析接続については，本書の第７章で再び取り上げる．

4.11 留 数 定 理

$z_0 \in \mathbb{C}$ を定点とし，領域 $D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\}$ で正則な関数 f を考える．（z_0 は f の定義域に入っていてもいなくてもよい．）z_0 を内部にもつ，D_R 内の任意の区分的に連続微分可能な単純閉曲線 C に対して定まる積分 $\int_C f(z)dz$ は，定理 4.10 によって，そのような曲線 C の取り方に依存しない[17]．つまり，これは，f と z_0 だけから決まる量である．そこで

$$\mathrm{Res}\,(z_0, f) := \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz \tag{4.35}$$

という量を導入し，これを f の $z = z_0$ における**留数** (residue) という．（$2\pi i$ で割ったのは便宜的なものである．）どの関数の留数であるかが文脈から明らかな場合は $\mathrm{Res}\,(z_0, f)$ を単に $\mathrm{Res}\,(z_0)$ と記す場合がある．

上の注意により，留数 $\mathrm{Res}\,(z_0, f)$ を具体的に計算するときは，C として，たとえば，z_0 を中心とする半径 $r \in (0, R)$ の円を像とする曲線 $C(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ をとることができる．

コーシーの積分定理（定理 4.8）から次の命題がただちにしたがう：

【命題 4.30】 z_0 が f の定義域に入っていて，f が z_0 で微分可能ならば，$\mathrm{Res}\,(z_0, f) = 0$.

次に，z_0 が f の定義域に入っていない場合を考察する．そのような点のクラスの１つを導入する：

---

17) 定理 4.10 で $n = 1$ の場合を考え，C_1 として，中心が z_0，半径が $\varepsilon > 0$ の円を像とする単純閉曲線 $C_\varepsilon(t) := z_0 + \varepsilon e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ をとれば，十分小さい任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$(C_\varepsilon)_{\mathrm{int}} \subset C_{\mathrm{int}}$ であり，$\int_C f(z)dz = \int_{C_\varepsilon} f(z)dz \cdots (*)$ が成り立つ．同様に，C と同じ性質をみたす，別の任意の曲線 C' についても $\int_C f(z)dz = \int_{C_\eta} f(z)dz \cdots (**)$ ($\eta > 0$ は十分小さい任意の正数)．必要ならば取り直すことにより，$\varepsilon = \eta$ としてよい．したがって，$\int_C f(z)dz = \int_{C'} f(z)dz$.

【定義 4.31】 f は領域 $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\}$ で正則な関数であるとする．正数 $\delta \in (0, R)$ と自然数 n および $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}$ で正則な関数 g で $g(z_0) \neq 0$ をみたすものが存在して

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}, \quad 0 < |z - z_0| < \delta \tag{4.36}$$

が成り立つとき，z_0 を f の**極** (pole)，n をその**位数** (order) とよぶ．この場合，f は z_0 に $\boldsymbol{n}$ **位の極**をもつという．特に，位数が 1 の極を**単純極** (simple pole) という．

上の定義において，g は連続であるから，$g(z_0) \neq 0$ ならば，z_0 の十分小さい近傍に属する任意の点 z に対して $g(z) \neq 0$（命題 2.39）．したがって，必要ならば δ を取り直すことにより，$g(z) \neq 0, |z - z_0| < \delta$ としてよい．以下，この事実は，しばしば断りなしに使う．

次の命題は，正則関数の極における留数の計算法を与える：

【命題 4.32】 $0 < |z - z_0| < R$ において正則な関数 f が z_0 に n 位の極をもつならば

$$\mathrm{Res}\,(z_0, f) = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)] \right)_{z = z_0}.$$

ここで，関数 $F(z)$ に対して $(F(z))_{z=z_0} := F(z_0)$．

証明　$G(z) := (z - z_0)^n f(z)$ とおけば，$\mathrm{Res}\,(z_0, f) = (2\pi i)^{-1} \int_C \frac{G(z)}{(z - z_0)^n} dz$ である（$C(t) := z_0 + \varepsilon e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ かつ $\varepsilon > 0$ は十分小）．だが，系 4.19 によって，右辺は，$G^{(n-1)}(z_0)/(n-1)!$ に等しい．　■

■ **例 4.19** ■　n を自然数とするとき，関数 $f(z) := 1/(z - z_0)^n$ は $z = z_0$ に n 位の極をもち，$\left.\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z - z_0)^n f(z)]\right|_{z=z_0} = \delta_{n1}$．したがって，$\mathrm{Res}\,(z_0, f) = \delta_{n1}$．

留数を用いることにより，線積分を計算することができる：

【定理 4.33】（留数定理 (residue theorem)**）**　f は領域 D で正則な関数であるとし，C を D 内の区分的に連続微分可能な単純閉曲線とする．f は C の内部の点 $z_1, \cdots, z_n$ に極をもち，$C_{\mathrm{int}} \setminus \{z_1, \cdots, z_n\} \subset D$ とする．このとき

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(z_k, f).$$

証明 定理 4.10 の単純な応用である（$C_j(t) = z_j + \varepsilon e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$（$\varepsilon > 0$ は十分小）の場合を考えればよい.） ∎

■ **例 4.20** ■ 点 z_0 のまわりを反時計回りに一周する，区分的に連続微分可能な単純閉曲線を C とする．このとき，例 4.19 と留数定理により

$$\int_C \frac{1}{(z-z_0)^n} dz = 2\pi i \delta_{n1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.37}$$

■ **例 4.21** ■ 関数 $f(z) = e^z/z^n$ は $z = 0$ に n 位の極をもち，$\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[z^n f(z)] = e^z$ であるから，その留数は $1/(n-1)!$．したがって，原点のまわりを反時計回りに一周する，任意の区分的に連続微分可能な単純閉曲線 C に対して

$$\int_C \frac{e^z}{z^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}.$$

特に，$C(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ として，両辺の実部と虚部を比較すると，次の公式が得られる：

$$\int_0^{2\pi} e^{r\cos t} \cos(r\sin t - (n-1)t)dt = \frac{2\pi r^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{4.38}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{r\cos t} \sin(r\sin t - (n-1)t)dt = 0. \tag{4.39}$$

第 2 式は，変数変換 $s = t - \pi$ を行うと，$[-\pi, \pi]$ 上の奇関数の積分に帰着できるので，上の式を使わなくても証明可能であるが，第 1 式は，自明ではない．このように，複素積分を用いることにより，1 実変数の実数値関数の積分に関する自明でない公式を簡単に導くことができる場合がある．複素解析学が通常の微分積分においても威力を発揮する例のひとつである．この側面に関しては，次節でより詳しく展開する．

4.12 留数定理の応用 —— 定積分の計算

留数定理を応用することにより，1 実変数の関数の定積分を簡単に求めることができる．ここでは，基本的な型の定積分だけを取り上げる．

4.12.1 積分 $\int_\omega^{\omega+2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ の計算

任意の実数 ω と複素数値連続関数 $F : [-1, 1] \times [-1, 1] \to \mathbb{C}$ に対して，定積

分 $\int_{\omega}^{\omega+2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ を計算することを考える．このために，複素平面 $\mathbb{C}$ 上で単位円を像とする曲線 $C(\theta) = e^{i\theta}$, $\theta \in [\omega, \omega + 2\pi]$ をとる．単位円周上の点 $z = e^{i\theta}$ に対して，$z^* = e^{-i\theta} = 1/z$ であるから

$$\cos\theta = \frac{z + z^*}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \ \sin\theta = \frac{z - z^*}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

θ が ω から $\omega + 2\pi$ まで動くとき，z は C の像全体を動き，$dz/d\theta = iz$ であるから

$$g_F(z) := F\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{iz} \tag{4.40}$$

とおけば

$$\int_{\omega}^{\omega+2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = \int_C g_F(z)dz \tag{4.41}$$

が成り立つ．したがって，関数 g_F が単位円の内部において，有限個の点 $a_1, \cdots, a_N$ に極をもち，これらの点以外では正則ならば，留数定理によって

$$\int_{\omega}^{\omega+2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \mathrm{Res}\,(a_n, g_F) \tag{4.42}$$

と計算される．右辺は ω に依らないから，$\int_{\omega}^{\omega+2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ は ω に依存しないこともわかる（もちろん，これは直接確かめることもできる）．

■ **例 4.22** ■　a は実定数で $|a| < 1$, $a \neq 0$ をみたすとし，積分 $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a\cos\theta}d\theta$ を計算しよう．これは，上の記号では $F(t, s) = 1/(1 + at)$, $t, s \in [-1, 1]$ の場合である．したがって

$$g_F(z) = \frac{2}{i(az^2 + 2z + a)} = \frac{2}{ia(z - \alpha_+)(z - \alpha_-)}.$$

ただし，$\alpha_\pm = (-1 \pm \sqrt{1 - a^2})/a$．この g_F は $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_\pm\}$ で正則であり，その単位円内における極は $z = \alpha_+$ だけであり，それは1位の極である．容易にわかるように

$$\mathrm{Res}\,(\alpha_+, g_F) = \frac{2}{ia(\alpha_+ - \alpha_-)} = \frac{1}{i\sqrt{1 - a^2}}.$$

ゆえに，(4.42) の応用により

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a\cos\theta}d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}. \tag{4.43}$$

この式は，$a=0$ の場合にも成り立つことは明らかである．

同様にして

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a\sin\theta}d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} \tag{4.44}$$

が示される．(これは (4.43) で変数変換 $\theta=\theta'-\frac{\pi}{2}$ を行い，3 角関数の加法定理と周期性を用いることによっても求められる.)

■ **例 4.23** ■ $a^2>b^2+c^2$ をみたす任意の実数 a,b,c に対して

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos\theta+c\sin\theta}d\theta = \frac{|a|}{a}\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}. \tag{4.45}$$

を示せ.

解 $b\neq 0$, $c\neq 0$ の場合を示せば十分である．このとき，$\delta\in[0,2\pi]$ で，$\cos\delta=c/\sqrt{b^2+c^2}$, $\sin\delta=b/\sqrt{b^2+c^2}$ となるものが存在する．これを使うと $b\cos\theta+c\sin\theta=\sqrt{b^2+c^2}\sin(\theta+\delta)$ と書ける．そこで，$k=\sqrt{b^2+c^2}/a$ とおけば

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos\theta+c\sin\theta}d\theta = \frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+k\sin(\theta+\delta)}d\theta.$$

(4.44) の応用により，右辺は $2\pi/[a(1-k^2)^{\frac{1}{2}}]$ に等しい．これを計算すれば，(4.45) の右辺に等しいことがわかる． ∎

容易に見てとれるように，(4.45) は (4.43) と (4.44) を統一する式である．

■ **例 4.24** ■ α は複素定数で $|\alpha|<1$ をみたすものとするとき

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2}d\theta = \frac{2\pi}{1-\alpha^2}. \tag{4.46}$$

を示せ.

解 関数 $F:[-1,1]\times[-1,1]\to\mathbb{C}$ を

$$F(t,s)=\frac{1}{1-2\alpha t+\alpha^2},\quad t,s\in[-1,1]$$

によって定義する．したがって，$g_F(z)=1/[i(1-\alpha z)(z-\alpha)]$．この g_F は $\mathbb{C}\setminus\{\alpha,1/\alpha\}$ で正則であり，その単位円内における極は $z=\alpha$ だけであり，それは 1 位の極である．したがって，$\mathrm{Res}\,(g_F,\alpha)=1/[i(1-\alpha^2)]$．ゆえに，(4.42) により，求める結果が得られる． ∎

4.12.2　積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

f を $\mathbb{R}$ 上の連続関数とする．もし，$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx$ が存在するならば，これを f に対する，$\mathbb{R}$ 上での**コーシーの主値積分** (principal value) といい，記号的に p.v. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ と表す：

$$\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx.$$

容易にわかるように，広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ が存在すれば，コーシーの主値積分 p.v. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ も存在して，p.v. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ が成り立つ．

だが，コーシーの主値積分 p.v. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ が存在しても，広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ は存在するとは限らないことに注意しよう．（反例：p.v. $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = 0$ であるが，広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ は存在しない．）

上半平面を Π_+ で表す：

$$\Pi_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}. \tag{4.47}$$

次の性質をもつ複素関数 f を考える．$z_1, \cdots, z_n \in \Pi_+$ とする．

(f.1) $z_1, \cdots, z_n$ は f の極であり，f は $D = \Pi_+ \setminus \{z_1, \cdots, z_n\}$ で正則で，実軸 $\mathbb{R}$ と D の和集合 $\mathbb{R} \cup D$ 上で連続である．

(f.2) $R > \max\{|z_1|, \cdots, |z_n|\}$ に対して

$$M_f(R) := \sup_{\theta\in[0,\pi]} |f(Re^{i\theta})| \tag{4.48}$$

とするとき，$\lim_{R\to\infty} RM_f(R) = 0$.

【定理 4.34】　関数 f は上の (f.1)，(f.2) をみたすとする．このとき

$$\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(z_k, f). \tag{4.49}$$

証明　定数 $R > 0$ を (f.2) のようにとり，有限直線 $L_R(t) := -R + 2tR$ ($t \in [0,1]$)（その像は実軸の区間 $[-R, R]$）と閉曲線 $C_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0,\pi]$ の和

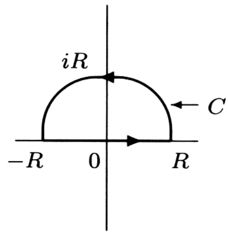


図 4.8　積分 p.v. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ の計算のための積分路

$C := L_R \cdot C_R$ に沿う，f の線積分を考え，留数定理を応用すれば

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(z_k, f).$$

一方

$$\int_C f(z)dz = \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}d\theta + \int_{-R}^{R} f(x)dx.$$

したがって

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = -\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}d\theta + 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(z_k, f).$$

容易にわかるように

$$\left|\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}d\theta\right| \le \int_0^{\pi} |f(Re^{i\theta})|R\,d\theta \le RM_f(R)\pi.$$

したがって，条件 (f.2) により，$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}d\theta = 0$．ゆえに (4.49) が得られる． ∎

f が下半平面

$$\Pi_- := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z < 0\} \tag{4.50}$$

で正則で，Π_- の中に有限個の極 $w_1, \cdots, w_m$ をもち，$\mathbb{R} \cup (\Pi_- \setminus \{w_1, \cdots, w_m\})$ 上で連続である場合ももちろん考えられる．だが，この場合は，$\tilde{f}(z) := f(-z)$ という関数 $\tilde{f}$ を考えることにより，定理 4.34 の場合に帰着できる．

■ **例 4.25** ■　関数 $f(z) = 1/(z^2+a^2) = 1/[(z+ia)(z-ia)]$ （$a>0$ は定数）は上述の (f.1), (f.2) をみたすことがわかる[18]．この場合，f の上半平面における極は $z = ia$ だけである．一方，命題 4.32 によって，$\mathrm{Res}\,(ia, f) = 1/(2ia)$．したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{a}. \tag{4.51}$$

同様にして

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+a^4}\,dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{2a^3} \tag{4.52}$$

が示される（章末演習問題 2）．

! 注意 4.3　$n \in \mathbb{N}$, $a>0$ とし

$$I_n(a) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}+a^{2n}}\,dx$$

とおく．このとき，変数変換 $x \to y = x/a$ により，$I_n(a) = a^{1-2n} I_n(1)$ がわかる．したがって，$I_n(a)$ を求めるには，$I_n(1)$ を求めれば十分である．

4.12.3　3 角関数を含む積分：$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(tx)\,dx,\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(tx)\,dx$

【定理 4.35】　関数 f は前項の (f.1) をみたし，かつ

$$\lim_{R\to\infty} M_f(R) = 0 \tag{4.53}$$

が成り立つとする（$M_f(R)$ は (4.48) で定義される数）．このとき，任意の $t>0$ に対して

$$\mathrm{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{itx}\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(z_k, fe^{itz}). \tag{4.54}$$

したがって，特に（両辺の実部と虚部をとることにより）

$$\mathrm{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(tx)\,dx = \mathrm{Re}\left(2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(z_k, fe^{itz})\right), \tag{4.55}$$

$$\mathrm{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(tx)\,dx = \mathrm{Im}\left(2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(z_k, fe^{itz})\right). \tag{4.56}$$

---

18) $|z^2+a^2| \geq |z|^2 - |a|^2$（3 角不等式の応用）を用いると，$R>a>0$ に対して，$|f(Re^{i\theta})| \leq 1/(R^2-a^2)$．

証明 定理 4.34 と同様．だが，いまの場合，次の評価に注意する必要がある：

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} f(z)e^{itz}dz\right| &\le M_f(R)R\int_0^\pi e^{-tR\sin\theta}d\theta \\ &= 2M_f(R)R\int_0^{\pi/2} e^{-tR\sin\theta}d\theta \\ &\le 2M_f(R)R\int_0^{\pi/2} e^{-2tR\theta/\pi}d\theta \\ &\quad (\because \sin\theta \ge 2\theta/\pi,\ \theta\in[0,\pi/2]) \\ &= M_f(R)\frac{\pi}{t}\left(1-e^{-tR}\right) \\ &\le M_f(R)\frac{\pi}{t} \to 0 \quad (R\to\infty).\end{aligned}$$

ここで，(4.53) を用いた． ∎

■ **例 4.26** ■ 任意の定数 $a>0$ に対して，関数

$$f(z)=\frac{z}{z^2+a^2}=\frac{z}{(z+ia)(z-ia)}$$

は条件 (f.1) をみたす．この f の上半平面における極は $z=ia$ だけであり，$\mathrm{Res}\,(ia, fe^{itz})=e^{-at}/2$ $(t\in\mathbb{R})$．$R>a$ とすると

$$|f(Re^{i\theta})|=\frac{R}{\sqrt{R^4+2a^2R^2\cos 2\theta+a^4}}$$

であるから

$$M_f(R)=\frac{R}{R^2-a^2}\to 0 \quad (R\to\infty).$$

したがって，定理 4.35 が応用できる．ゆえに次の公式が得られる（$t<0$ の場合の結果は，$t>0$ の場合の式で変数変換 $x\to -x$ をすることにより得られる）：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+a^2}e^{itx}dx=\epsilon(t)\pi i e^{-|t|a}, \quad t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{4.57}$$

ただし，$\epsilon(\cdot)$ は $\epsilon(t):=t/|t|,\ t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ によって定義される関数であり，**符号関数**とよばれる（$t>0$ ならば $\epsilon(t)=1$；$t<0$ ならば $\epsilon(t)=-1$）．

したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+a^2}\cos(tx)\,dx=0, \tag{4.58}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+a^2}\sin(tx)\,dx=\epsilon(t)\pi e^{-|t|a}, \quad t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{4.59}$$

なお，第 1 式は被積分関数が奇関数であることからもわかる．

同様にして次の公式が得られる：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-|t|a}, \quad a > 0,\ t \in \mathbb{R}. \tag{4.60}$$

したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-|t|a}, \quad a > 0,\ t \in \mathbb{R}. \tag{4.61}$$

4.12.4　積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} e^{itx} dx$

点 $x_0 \in \mathbb{R}$ を含む区間 $[a, b]$ $(a < x_0 < b)$ から x_0 を除いた集合 $[a, b] \setminus \{x_0\}$ 上で連続な関数 f を考える．（x_0 は f の定義域に入っていてもいなくてもよい．入っている場合にも x_0 で連続である必要はない．）もし

$$\text{p.v.} \int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx \right) \tag{4.62}$$

が存在するならば，これを関数 f の**主値積分**または**コーシーの主値** (principal value) という．

f が $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ 上の連続関数の場合

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{R \to \infty} \text{p.v.} \int_{-R}^{R} f(x) dx$$

と定義する（右辺が存在するとき）．

■ **例 4.27** ■　$a < x_0 < b$ のとき

$$\text{p.v.} \int_a^b \frac{1}{x - x_0} dx = \log \frac{b - x_0}{x_0 - a}.$$

【定理 4.36】　複素関数 f は 4.12.2 項における性質 (f.1) をみたすとし

$$\lim_{R \to \infty} M_f(R)/R = 0 \tag{4.63}$$

が成り立つとする．このとき，任意の $t > 0$ に対して

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} e^{itx} dx = i\pi f(0) + 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\left(z_k, \frac{f}{z} e^{itz} \right). \tag{4.64}$$

証明　$R > \varepsilon > 0$ とし，$C_r(t) = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$ $(r = \varepsilon, R)$, $L_{a,b} := a + t(b-a)$, $t \in [0,1]$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$ とおく．関数 $f(z)e^{itz}/z$ を閉曲線 $C_R \cdot L_{-R,-\varepsilon} \cdot (-C_\varepsilon) \cdot L_{\varepsilon,R}$ に沿って積分する．このとき，R を十分大きく，ε を十分小さくとれば，留数定理（定理 4.33）により

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} e^{itx} dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{f(x)}{x} e^{itx} dx = &\int_0^\pi f(\varepsilon e^{i\theta}) i e^{it\varepsilon\cos\theta} e^{-t\varepsilon\sin\theta} d\theta \\ &- \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) i e^{itR\cos\theta} e^{-tR\sin\theta} d\theta \\ &+ 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left(z_k, \frac{f}{z} e^{itz}\right).\end{aligned}$$

右辺第 1 項は $\varepsilon \downarrow 0$ のとき，$\pi i f(0)$ に収束し，右辺第 2 項は $R \to \infty$ のとき，0 に収束する．したがって，(4.64) が得られる．　■

■ **例 4.28** ■　$f(x) = 1$ の場合を考えると

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x} dx = \epsilon(t) i\pi, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{4.65}$$

ただし，$\epsilon(t)$ は符号関数である（例 4.26）．

したがって

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin tx}{x} dx = \epsilon(t)\pi, \tag{4.66}$$

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{x} dx = 0. \tag{4.67}$$

関数 $(\sin tx)/x$ は偶関数であるから，(4.66) は

$$\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x} dx = \epsilon(t) \frac{\pi}{2} \tag{4.68}$$

を意味する．ただし，左辺の積分は広義積分の意味でとる．

■ **例 4.29** ■　任意の $p \in \mathbb{R}$ に対して

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{ipx} dx = \begin{cases} 0 & ;\ |p| > 1 \\ \pi/2 & ;\ |p| = 1 \\ \pi & ;\ |p| < 1 \end{cases} \tag{4.69}$$

を示せ．

解　$\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$ を用いて

$$\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{ipx} dx = \frac{1}{2i}\left(\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(1+p)x}}{x} dx - \text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(1-p)x}}{x} dx\right)$$

と変形し，(4.65) を用いればよい．なお，$p = \pm 1$ の場合については

$$\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = 0$$

に注意せよ．■

4.12.5　フレネルの公式

この節を終えるにあたって，物理学でよく現れる特徴的な積分に関する公式を証明しておこう．

【命題 4.37】(フレネル[19]の公式)　次の式が成り立つ：

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}. \tag{4.70}$$

証明　関数 $f(z) = e^{-z^2}$, $z \in \mathbb{C}$ は整関数である．この関数を，原点を中心とする半径 R で中心角が $\pi/4$ である扇型の周に沿って積分してみる．$\alpha = Re^{i\pi/4} = R(1+i)/\sqrt{2}$ とおく．$C_R(\theta) := Re^{i\theta}, \theta \in [0, \pi/4]$, $L_{0,R}(t) := tR, t \in [0,1], L_{\alpha,0}(t) = \alpha - t\alpha$, $t \in [0,1]$ とし，$C := L_{0,R} \cdot C_R \cdot L_{\alpha,0}$ とすれば (図 4.9)，$\int_C f(z)dz = 0$.

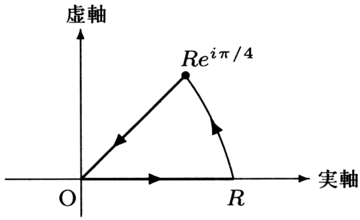


図 4.9　積分路

一方，左辺 $= I_1(R) + I_2(R) + I_3(R)$ と書ける．ただし

[19] Augustin Jean Fresnel (1788–1827). フランスの物理学者.

$$I_1(R) := \int_0^R e^{-x^2}dx,$$
$$I_2(R) := \int_0^{\pi/4} e^{-R^2e^{i2\theta}} Rie^{i\theta}d\theta,$$
$$I_3(R) := \int_R^0 e^{-r^2e^{i\pi/2}} e^{i\pi/4}dr = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\int_0^R e^{-ir^2}dr.$$

$|I_2(R)| \le \int_0^{\pi/4} e^{-R^2\sin 2\theta}R\,d\theta$ である．$0 \le 2\theta \le \pi/2$ であるから，$\sin 2\theta \ge 4\theta/\pi$．したがって

$$|I_2(R)| \le R\int_0^{\pi/4} e^{-4R^2\theta/\pi}d\theta = \frac{\pi(1-e^{-R^2})}{4R} \to 0 \quad (R\to\infty).$$

したがって

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\int_0^\infty e^{-ir^2}dr = \int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

一方，$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$（演習問題 3）．ゆえに

$$\int_0^\infty e^{-ir^2}dr = \frac{\sqrt{2}}{1+i}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1-i).$$

$e^{-ir^2} = \cos(r^2) - i\sin(r^2)$ であるから，両辺の実部と虚部を比べることにより，(4.70) が得られる．■

式 (4.70) の一般化については，演習問題 4 で考察する．

4.13　積分によって定義される正則関数

J を $\mathbb{R}$ の区間（$a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ として，$[a,b]$, (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[b,\infty)$, $(-\infty,a]$, (b,∞), $(-\infty,a)$, $\mathbb{R}$ のいずれかの型の集合），D を $\mathbb{C}$ の領域とする．J と D の直積集合 $J\times D = \{(t,z) \mid t\in J, z\in D\}$ から $\mathbb{C}$ への写像 $f: J\times D \to \mathbb{C}$; $(t,z)\mapsto f(t,z)\in\mathbb{C}$ を考える．このとき，各 $t\in J$ に対して，対応：$z\mapsto f(t,z)$ は D 上の複素関数を与える．一方，各 $z\in D$ に対して，対応：$t\mapsto f(t,z)$ は J 上の複素数値関数（複素数に値をとる写像）を与える．

任意の $\varepsilon>0$ に対して，正数 $\delta>0, h_0>0$ があって，$|s|<\delta, |h|<h_0$ ならば

$$|f(t+s,z+h) - f(t,z)| < \varepsilon, \quad t+s\in J,\ z+h\in D$$

が成り立つならば，f は点 (t, z) で**連続**であるという．f が $J \times D$ のすべての点で連続であるとき，f は $J \times D$ 上で連続であるという．次の定理は重要である．

【定理 4.38】 f は $J \times D$ 上で連続であり，D の各点 z_0 に対して，正数 $\delta > 0$ と J 上の非負値連続関数 g で次の性質 (a), (b) をみたすものがあると仮定する（条件 (a) は J が有界閉区間の場合は不要）：

(a) J が有界閉区間以外の区間のとき $\displaystyle\int_J g(t)dt < +\infty$（積分は広義積分）．

(b)
$$|f(t, z)| \leq g(t), \quad z \in U_\delta(z_0) \subset D,\ t \in J \tag{4.71}$$

このとき，次の (i), (ii) が成立する：

(i) 関数
$$F(z) := \int_J f(t, z)dt,\ z \in D \tag{4.72}$$
は D 上で連続である．

(ii) D 内の任意の区分的に連続微分可能な曲線に対して
$$\int_C F(z)dz = \int_J dt \int_C f(t, z)dz. \tag{4.73}$$
すなわち，**累次積分の順序交換ができる．**

証明　(i) (4.71) により，$F(z)$ は確かに定義されている．$z_0 \in D$ を任意にとり，h は $|h|$ が十分小さい複素数とする．簡単のため，$J = \mathbb{R}$ の場合についてのみ証明する．$-c < 0 < d$ とする．このとき

$$\begin{aligned}
|F(z_0 + h) - F(z_0)| &= \bigg| \int_{-\infty}^{-c} f(t, z_0 + h)dt + \int_{-c}^{d} f(t, z_0 + h)dt \\
&\quad + \int_{d}^{\infty} f(t, z_0 + h)dt - \int_{-\infty}^{-c} f(t, z_0)dt \\
&\quad - \int_{-c}^{d} f(t, z_0)dt - \int_{d}^{\infty} f(t, z_0)dt \bigg| \\
&\leq \int_{-c}^{d} \Big| f(t, z_0 + h) - f(t, z_0) \Big| dt \\
&\quad + 2\int_{-\infty}^{-c} g(t)dt + 2\int_{d}^{+\infty} g(t)dt.
\end{aligned}$$

仮定 (a) により，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，R_0 があって，$c, d > R_0$ ならば

$$\int_{-\infty}^{-c} g(t)dt < \varepsilon, \quad \int_{d}^{+\infty} g(t)dt < \varepsilon.$$

f は $[-c, d] \times \{z \in D \mid |z - z_0| \leq \eta\}$（$\eta > 0$ は十分小）において一様連続であるから（この証明は「$\mathbb{R}^2$ の有界閉集合上の 2 個の実変数の連続関数は一様連続である」という事実の証明と同様；定理 2.41 の証明をまねすればよい），ある $h_0 > 0$ があって，$|h| < h_0$ ならば，$\sup_{t\in[-c,d]} |f(t, z_0 + h) - f(t, z_0)| < \varepsilon$．したがって，$\int_{-c}^{d} |f(t, z_0 + h) - f(t, z_0)|dt < (d + c)\varepsilon$．ゆえに，$|h| < h_0$ ならば $|F(z_0 + h) - F(z_0)| < 5\varepsilon$．これは，$F$ の点 z_0 での連続性を意味する．

(ii) (i) によって，積分 $\int_C F(z)dz$ は定義され

$$\int_C F(z)dz = \int_C \left(\int_{-c}^{d} f(t, z)dt \right) dz + I(c) + J(d)$$

ただし，

$$I(c) := \int_C \left(\int_{-\infty}^{-c} f(t, z)dt \right) dz, \ J(d) := \int_C \left(\int_{d}^{\infty} f(t, z)dt \right) dz.$$

区分的に連続微分可能な曲線 $C_1, \cdots, C_n$ で次の性質をみたすものがとれる：(1) $C = C_1 \cdot C_2 \cdot \cdots \cdot C_n$; (2) 各 j に対して，$|f(t, z)| \leq g_j(t)$, $z \in \mathrm{R}(C_j)$, $t \in J$ かつ $\int_J g_j(t)dt < +\infty$ をみたす連続関数 g_j が存在する．

したがって

$$|I(c)| \leq \sum_{j=1}^{n} L(C_j) \int_{-\infty}^{-c} g_j(t)dt \to 0 \quad (c \to +\infty).$$

同様に $\lim_{d\to\infty} J(d) = 0$ がわかる．ゆえに

$$\int_C F(z)dz = \lim_{c,d\to+\infty} \int_C \left(\int_{-c}^{d} f(t, z)dt \right) dz.$$

一方，$C : [a, b] \to \mathbb{C}$ とすれば

$$\begin{aligned} \int_C \left(\int_{-c}^{d} f(t, z)dt \right) dz &= \int_a^b \left(\int_{-c}^{d} f(t, C(s))dt \right) C'(s)ds \\ &= \int_{-c}^{d} \left(\int_a^b f(t, C(s))C'(s)ds \right) dt \\ &= \int_{-c}^{d} \left(\int_C f(t, z)dz \right) dt. \end{aligned}$$

よって，$\int_C F(z)dz = \int_J dt \int_C f(t,z)dz$.　■

次に定理 4.38 の仮定のもとで定義される複素関数 F がいつ正則になるかを考察する．$t \in J$ を任意に固定するとき，z の関数として $f(t,z)$ が D 上で正則であるとき，その導関数を $\dfrac{\partial f(t,z)}{\partial z}$，あるいは $\partial f(t,z)/\partial z$ のように表す.

【定理 4.39】　f は $J \times D$ 上で連続であるとし，$\int_J |f(t,z)|dt < +\infty$ とする．また，各 $t \in J$ に対して，z の関数 $f(t,z)$ は D 上で正則で，$\partial f(t,z)/\partial z$ は $J \times D$ 上で連続であるとする．さらに，D の各点 z_0 に対して，正数 $\delta > 0$ と J 上の非負値連続関数 g で次の性質 (a), (b) をみたすものがあると仮定する（条件 (a) は J が有界閉区間の場合は不要）：

(a) J が有界閉区間以外の区間のとき，$\displaystyle\int_J g(t)dt < +\infty$.

(b)

$$\left|\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\right| \le g(t), \quad z \in U_\delta(z_0) \subset D,\ t \in J \tag{4.74}$$

このとき，(4.72) によって定義される関数 F は D 上で正則であり

$$F'(z) = \int_J \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}dt \tag{4.75}$$

が成り立つ.

証明　$z_0 \in D$ を任意にとる．このとき，$|h|$ が十分小である $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{F(z_0+h)-F(z_0)}{h} &= \int_J \frac{f(t,z_0+h)-f(t,z_0)}{h}dt \\ &= \frac{1}{h}\int_J dt \int_{z_0}^{z_0+h} \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}dz.\end{aligned}$$

そこで，$G(z) := \int_J (\partial f(t,z)/\partial z)dt$ とすれば，仮定により，定理 4.38 を，関数 $\partial f(t,z)/\partial z$ に応用できる．したがって，$G(z)$ は D 上で連続であり，

$$\int_{z_0}^{z_0+h} G(z)dz = \int_J dt \int_{z_0}^{z_0+h} \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}dz.$$

ゆえに

$$\frac{F(z_0+h)-F(z_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_{z_0}^{z_0+h} G(z)dz.$$

定理 4.11 の証明と同様にして，右辺は $h \to 0$ のとき，$G(z_0)$ に収束することが示される．したがって，F は z_0 で微分可能であり，$F'(z_0) = G(z_0)$ が成り立つ．$z_0 \in D$ は任意であったから，(4.75) を得る． ∎

定理 4.39 は次のことを語る：実数パラメータ t に依存する，D 上の正則関数 $f(t,z)$ の t-積分によって定義される関数 $F(z) = \int_J f(t,z)dt$ は，$\partial f(t,z)/\partial z$ がしかるべき条件をみたせば，D 上の正則関数であり，その導関数が f の導関数の t-積分によって与えられる．式 (4.75) は，定理の条件のもとで，微分と積分の順序交換ができることを示す[20]．

■ **例 4.30** ■ 関数 $f(t,z) = e^{-zt^{2n}}$, $t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$ を考える．これは，容易にわかるように，$\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ 上で連続である．$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とすれば，$|f(t,z)| = e^{-xt^{2n}}$ であるから，$x > 0$ ならば，$\int_{\mathbb{R}} e^{-xt^{2n}} dt < +\infty$ である[21]．したがって，$\mathrm{Re}\, z > 0$ ならば

$$F_n(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-zt^{2n}} dt, \quad \mathrm{Re}\, z > 0$$

が定義される．いまの場合，$f(t,z)$ は z の関数として $\mathbb{C}$ 上で正則であり，$\partial f(t,z)/\partial z = -t^{2n}e^{-zt^{2n}}$．したがって，$\mathrm{Re}\, z > \sigma > 0$ ならば，$|\partial f(t,z)/\partial z| \leq t^{2n}e^{-\sigma t^{2n}}$ であり，$\int_{\mathbb{R}} t^{2n}e^{-\sigma t^{2n}} dt < +\infty$．($\because\ t^{2n}e^{-\sigma t^{2n}} \leq \sup_{a \geq 0}[(1+a)a^n e^{-\sigma a^n}]/(1+t^2)$ に注意.) 右半平面 $\mathrm{Re}\, z > 0$ の任意の点 z_0 に対して，$\mathrm{Re}\, z_0 > \sigma$ をみたす $\sigma > 0$ がとれる．ゆえに，$g(t) = t^{2n}e^{-\sigma t^{2n}}$ として，定理 4.39 を応用できるので，F_n は右半平面で正則であり

$$F_n'(z) = -\int_{\mathbb{R}} t^{2n} e^{-zt^{2n}} dt$$

が成り立つ．

■ **例 4.31** ■ ϕ を $[0, +\infty)$ 上の連続関数で

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\phi(t)|}{1+t} dt < +\infty$$

をみたすものとする．このとき，$z = x + iy$, $x < 0$ ならば，任意の $t > 0$ に対して，$1/|z-t| \leq 1/(|x|+t) \leq ((|x|+1)/|x|) \cdot 1/(1+t)$．したがって

---

20) すでに 2 つの実変数の実数値関数の場合に学んだように，微分と積分の順序交換は一般にはできないことに注意しよう．

21) $e^{-xt^{2n}} = [(1+t^2)e^{-xt^{2n}}]/(1+t^2)$ と変形し，$M := \sup_{a \geq 0}[(1+a)e^{-xa^n}] < +\infty$ (これは微分法で簡単に証明できる) に注意すれば，$e^{-xt^{2n}} \leq M/(1+t^2)$．したがって，$\int_{\mathbb{R}} e^{-xt^{2n}} dt \leq M \int_{\mathbb{R}} 1/(1+t^2) dt < +\infty$.

$$\Phi(z) := \int_0^{+\infty} \frac{\phi(t)}{t-z} dt, \quad \mathrm{Re}\, z < 0$$

が定義される．$f(t,z) = \phi(t)/(t-z)$ とおくと，これは，各 $t \geq 0$ に対して，z の関数として，切断平面 $\mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ で正則であり

$$\frac{\partial f(t,z)}{\partial z} = \frac{\phi(t)}{(t-z)^2}, \quad t \geq 0, \ z \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty).$$

上と同様にして

$$\left| \frac{\partial f(t,z)}{\partial z} \right| \leq \frac{(1+|x|)^2}{|x|^2} \frac{|\phi(t)|}{(1+t)^2}, \quad x = \mathrm{Re}\, z < 0, \ t \geq 0$$

であり，$\int_0^\infty |\phi(t)|/(1+t)^2 dt \leq \int_0^\infty |\phi(t)|/(1+t) dt < +\infty$．したがって，いま考察している関数 $f(t,z)$ に定理 4.39 を応用することができる．ゆえに，$\Phi(z)$ は $\mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ 上で正則であり

$$\Phi'(z) = \int_0^\infty \frac{\phi(t)}{(t-z)^2} dt$$

が成り立つ．

4.14 ラプラス変換

積分によって定義される正則関数で，応用上重要なクラスをひとつ取り上げておこう．f を $(0,\infty)$ 上の実数値連続関数とし，$s \in \mathbb{C}$ とする．関数 $f(t)e^{-st}$ の $t \in (0,\infty)$ に関する広義積分 $\int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$ を考えたいのであるが，積分範囲が半無限区間であるから，その収束性が問題になる．この問題については次の補題が助けになる：

【補題 4.40】 ある $\gamma \in \mathbb{R}$ があって

$$\int_0^\infty |f(t)| e^{-\gamma t} dt < \infty \tag{4.76}$$

ならば，$\mathrm{Re}\, s \geq \gamma$ をみたすすべての $s \in \mathbb{C}$ に対して，$\int_0^\infty |f(t)e^{-st}| dt < \infty$．

証明　$|f(t)e^{-st}| = |f(t)| e^{-(\mathrm{Re}\, s)t} \leq |f(t)| e^{-\gamma t}$ $(t \geq 0)$．したがって

$$\int_0^\infty |f(t)e^{-st}| dt \leq \int_0^\infty |f(t)| e^{-\gamma t} dt < \infty.$$

∎

以下，(4.76) が成り立つとする．このとき，上の補題により，$\mathrm{Re}\, s \geq \gamma$ ならば，積分

$$F(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{4.77}$$

が定義され，対応 $F : s \mapsto F(s)$ は $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, s \geq \gamma\}$ 上の複素関数を与える．関数 F を f の**複素ラプラス変換**といい

$$F := L[f] \tag{4.78}$$

と記す[22]．

実数 σ があって，$\mathrm{Re}\, s > \sigma$ ならば $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ が収束し，$\mathrm{Re}\, s < \sigma$ では $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ が収束しないとき，σ をラプラス変換 F の**収束座標**といい，$\mathrm{Re}\, s = \sigma$ を**収束軸**とよぶ．

■ **例 4.32** ■ $f(t) = c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$（定数関数）ならば，$s \neq 0$ のとき

$$F(s) = c\int_0^\infty e^{-st}dt = c \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^R.$$

したがって，$F(s)$ は $\mathrm{Re}\, s > 0$ ならば収束し，$F(s) = c/s$ であり，$\mathrm{Re}\, s < 0$ ならば，$F(s)$ は発散する．ゆえに，この場合の収束座標 σ は，$\sigma = 0$ であり

$$F(s) = \frac{c}{s}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0.$$

■ **例 4.33** ■ $f(t) = e^{at}$（a は複素定数）ならば，$s \neq a$ のとき

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\right]_0^R.$$

したがって，この場合の収束座標は $\sigma = \mathrm{Re}\, a$ であり

$$F(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \mathrm{Re}\, s > \mathrm{Re}\, a.$$

■ **例 4.34** ■ $f(t) = \cos(at)$（a は複素定数）ならば，$f(t) = (e^{iat} + e^{-iat})/2$ であるから前例により，$\mathrm{Re}\, s > |\mathrm{Im}\, a|$ ならば

$$F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia}\right) = \frac{s}{s^2+a^2}.$$

---

[22] 通常，s が実数の場合の F をラプラス変換という．以下，複素ラプラス変換も単にラプラス変換とよぶ．

■ **例 4.35** ■　$f(t) = \sin(at)$（a は複素定数）ならば，$f(t) = (e^{iat} - e^{-iat})/(2i)$ であるから，前例と同様にして，$\mathrm{Re}\, s > |\mathrm{Im}\, a|$ ならば

$$F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

次の定理は重要である．

【定理 4.41】　f を上述のものとする．このとき，$L[f]$ は $\mathrm{Re}\, s > \gamma$ で正則であり

$$L[f]'(s) = -L[tf] \tag{4.79}$$

が成り立つ[23)]．したがって，特に

$$L[f]^{(n)}(s) = (-1)^n L[t^n f], \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.80}$$

証明　$g(t,s) = f(t)e^{-st}$ とおけば，これは，t について連続であり，s については整関数である．さらに，$\partial g(t,s)/\partial s = -f(t)te^{-st}$ であるので，$\mathrm{Re}\, s > \gamma + \varepsilon$ のとき $(\varepsilon > 0)$，$M := \sup_{t \geq 0} te^{-\varepsilon t}$（これは有限）とおけば

$$\left| \frac{\partial g(t,s)}{\partial s} \right| \leq M|f(t)|e^{-\gamma t}.$$

したがって，定理 4.39 が応用できるので，$F = L[f]$ は $\mathrm{Re}\, s > \gamma + \varepsilon$ で正則であり，(4.79) が成り立つことが結論される．$\varepsilon > 0$ は任意であったから，F は $\mathrm{Re}\, s > \gamma$ で正則である．(4.80) は，(4.79) を順次微分することにより，得られる．■

公式 (4.80) は，積分の計算に使うことができる．

■ **例 4.36** ■　例 4.34 によって，$\mathrm{Re}\, s > |\mathrm{Im}\, a|$ に対して $L[\cos(at)] = s/(s^2 + a^2)$ である．一方，$L[t\cos(at)](s) = -L[\cos(at)]'(s) = (s^2 - a^2)/(s^2 + a^2)^2$．したがって

$$\int_0^\infty t\cos(at)e^{-st}dt = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}, \quad \mathrm{Re}\, s > |\mathrm{Im}\, a|.$$

■ **例 4.37** ■　例 4.35 と同様の方法により

$$\int_0^\infty t\sin(at)e^{-st}dt = \frac{2sa}{(s^2 + a^2)^2}, \quad \mathrm{Re}\, s > |\mathrm{Im}\, a|$$

---

23) $L[tf]$ は関数 $tf(t)$ のラプラス変換：$L[tf](s) = \int_0^\infty tf(t)e^{-st}dt$.

が導かれる．

次の定理も積分の計算に応用できる．

【定理 4.42】 $\int_0^\infty |f(t)e^{-st}|dt < \infty$, $\mathrm{Re}\, s > 0$ かつ

$$\int_0^\infty \frac{|f(t)|}{t} dt < \infty \tag{4.81}$$

とする．このとき，$F(s) = L[f](s)$, $\mathrm{Re}\, s > 0$ とすれば

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^\infty F(s) ds. \tag{4.82}$$

証明　$\mathrm{Re}\, s > \varepsilon > 0$ とすれば, $|f(t)e^{-st}| \le |f(t)|e^{-\varepsilon t}$ で $\int_0^\infty |f(t)|e^{-\varepsilon t}dt < \infty$. したがって，定理 4.38 によって，任意の $R > \varepsilon$ に対して

$$\int_\varepsilon^R F(s)ds = \int_0^\infty dt\, f(t) \int_\varepsilon^R e^{-st}ds = \int_0^\infty \frac{f(t)e^{-\varepsilon t}}{t} dt - \int_0^\infty \frac{f(t)e^{-Rt}}{t} dt.$$

これと条件 (4.81) により，(4.82) が得られる．■

【系 4.43】 $\int_0^\infty |f(t)e^{-st}|dt < \infty$, $\mathrm{Re}\, s > 0$ かつ $\sup_{0<t<1} |f(t)|/t < \infty$ とする．$F(s) = L[f](s)$, $\mathrm{Re}\, s > 0$ とし，$\int_0^\infty F(s)ds$ は存在すると仮定する．このとき

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-\varepsilon t} dt = \int_0^\infty F(s) ds. \tag{4.83}$$

証明　$g(t) = f(t)e^{-\varepsilon t}$ とおけば，$\int_0^\infty |g(t)|/t\, dt < \infty$ であり（積分区間を $(0, 1)$ と $[1, \infty)$ に分けて評価せよ），$\int_0^\infty |g(t)e^{-st}|dt = \int_0^\infty |f(t)|e^{-(\varepsilon + \mathrm{Re}\, s)t}dt < \infty$. したがって，定理 4.42 により

$$\int_0^\infty F(s + \varepsilon)ds = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-\varepsilon t} dt.$$

変数変換により，左辺 $= \int_\varepsilon^\infty F(s)ds$. そこで，$\varepsilon \downarrow 0$ とすれば，(4.83) を得る．■

■ 例 4.38 ■　任意の $a > 0, b > 0$ に対して

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \log \frac{b}{a} \tag{4.84}$$

を証明せよ．

解　$f(t) = e^{-at} - e^{-bt}$ とすれば,

$$F(s) = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}, \quad \operatorname{Re} s > \max\{-a, -b\}.$$

$|f(t)|/t$ は $(0, \infty)$ で積分可能.（$\because$ $x \geq 0$ ならば, $1 - e^{-x} \leq x$. したがって, 任意の $t > 0$ に対して, $|f(t)|/t \leq (|e^{-at} - 1| + |1 - e^{-bt}|)/t \leq (a+b)$. ゆえに, $\int_0^1 |f(t)|/t\,dt < \infty$. また, $\int_1^\infty |f(t)|/t\,dt \leq \int_1^\infty (e^{-at} + e^{-bt})dt < \infty$.）したがって, 定理 4.42 によって

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}\right) dt = \log\frac{b}{a}.$$

したがって, (4.84) が成り立つ.　■

■ 例 4.39 ■　例 4.28 で取り上げた公式 (4.68) はラプラス変換の方法でも証明することができることを示そう.

$a > 0$ とし, $f(t) = \sin(at)$ とすれば, $\sup_{0<t<1} |\sin(at)/t| < \infty$. したがって, 例 4.35 と系 4.43 によって

$$\int_0^\infty \frac{a}{s^2 + a^2} ds = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_0^\infty \frac{\sin(at)}{t} e^{-\varepsilon t} dt.$$

$(\tan^{-1} s/a)' = a/(s^2 + a^2)$ であるから

$$\int_0^\infty \frac{a}{s^2 + a^2} ds = \frac{\pi}{2}.$$

一方

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_0^\infty \frac{\sin(at)}{t} e^{-\varepsilon t} dt = \int_0^\infty \frac{\sin(at)}{t} dt \quad \cdots\cdots (*)$$

（証明は以下を参照）. したがって

$$\int_0^\infty \frac{\sin(at)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

$a < 0$ の場合は, $\sin(at) = -\sin(|a|t)$ に注意して, $a > 0$ の場合の結果を使えばよい.

(∗) の証明[24]

$\int_0^\infty \sin(at)e^{-\varepsilon t}/t\,dt = I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon)$ と分ける. ただし,

$$I_1(\varepsilon) := \int_0^1 \frac{\sin(at)e^{-\varepsilon t}}{t} dt, \quad I_2(\varepsilon) := \int_1^\infty \frac{\sin(at)e^{-\varepsilon t}}{t} dt.$$

---

24) 積分と極限の交換は一般には成立しないことに注意.

$\sup_{0<t<1}|\sin(at)/t| < \infty$, $e^{-\varepsilon t} \le 1$, $t \ge 0$ であるから

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} I_1(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{\sin(at)}{t}dt$$

はすぐにわかる．$I_2(\varepsilon)$ については，$(-\cos(at)/a)' = \sin(at)$ を用いて 1 回部分積分を行うと

$$I_2(\varepsilon) = \frac{\cos a}{a}e^{-\varepsilon} - \frac{1}{a}\int_1^\infty \frac{\cos(at)}{t^2}e^{-\varepsilon t}dt - \frac{\varepsilon}{a}J(\varepsilon).$$

ただし，$J(\varepsilon) := \int_1^\infty \cos(at)e^{-\varepsilon t}/t\,dt$．$(\sin(at))'/a = \cos(at)$ を用いて，部分積分を行うと

$$J(\varepsilon) = -\frac{\sin a}{a}e^{-\varepsilon} + \frac{1}{a}\int_1^\infty \frac{\sin(at)}{t^2}e^{-\varepsilon t}dt + \frac{\varepsilon}{a}I_2(\varepsilon).$$

したがって

$$\begin{aligned} I_2(\varepsilon) = \frac{1}{1+(\varepsilon/a)^2}&\left\{\frac{\cos a}{a}e^{-\varepsilon} - \frac{1}{a}\int_1^\infty \frac{\cos(at)}{t^2}e^{-\varepsilon t}dt\right\} \\ &+\frac{\varepsilon}{1+(\varepsilon/a)^2}\left\{\frac{\sin a}{a^2}e^{-\varepsilon} - \frac{1}{a^2}\int_1^\infty \frac{\sin(at)}{t^2}e^{-\varepsilon t}dt\right\}. \end{aligned}$$

$\int_1^\infty |\sin(at)|/t^2dt \le \int_1^\infty 1/t^2dt < \infty$．同様に，$\int_1^\infty |\cos(at)|/t^2dt < \infty$．したがって，右辺にある積分において，極限 $\varepsilon\downarrow 0$ と積分を交換できる．ゆえに

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} I_2(\varepsilon) = \frac{\cos a}{a} - \frac{1}{a}\int_1^\infty \frac{\cos(at)}{t^2}dt = \int_1^\infty \frac{\sin(at)}{t}dt.$$

ここで，再び，部分積分を行った．以上から，$(*)$ が成立することがわかる．■

ラプラス変換については非常に多くのことが知られており，応用も広い．この節で述べたことは，ラプラス変換の最も初歩的な部分にすぎない．ラプラス変換の理論のさらに詳しい展開については，ラプラス変換の専門書を参照されたい[25]．

演習問題

1．C は原点を中心とする単位円を正の向きに一周する連続微分可能な曲線とする．このとき，次の積分を求めよ（n は任意の自然数, $a \in \mathbb{C}$）．

[25] ラプラス変換の理論の最も普遍的かつ厳密な形式は，それを超関数の理論の枠内でとらえることによって達成される．この観点から書かれた本のひとつとして，L. シュワルツ『物理数学の方法』（岩波書店，1966）の VI 章がある．この書物は，超関数の理論への入門書としても優れている．

(i) $\displaystyle\int_C \frac{z^n}{\cos z}dz.$　(ii) $\displaystyle\int_C \frac{z^n}{\sin z}dz.$　(iii) $\displaystyle\int_C \frac{e^{az^n}}{z}dz.$

(iv) $\displaystyle\int_C (z^*)^n dz.$　(v) $\displaystyle\int_C \frac{\sin(az)}{z^2}dz.$　(vi) $\displaystyle\int_C \frac{e^{az}}{(nz+1)[(n+1)z+1]}dz.$

2. 式 (4.52) を示せ.

3. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を示せ.

4. 任意の自然数 n に対して，次の式を証明せよ.

$$\int_0^\infty \cos(x^{2n})dx = \left(\cos\frac{\pi}{4n}\right)\int_0^\infty e^{-x^{2n}}dx,$$
$$\int_0^\infty \sin(x^{2n})dx = \left(\sin\frac{\pi}{4n}\right)\int_0^\infty e^{-x^{2n}}dx.$$

5. $a > 0$ とするとき，

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2+\sin^2\theta}d\theta = \frac{2\pi}{a\sqrt{a^2+1}},$$
$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2+\cos^2\theta}d\theta = \frac{2\pi}{a\sqrt{a^2+1}}$$

を示せ.

6. $a > 0, b, c$ は $b^2 < 4ac$ をみたす実数であるとする．このとき，積分

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

を求めよ.

7. $a > 0$ に対して

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+a^2)}dx$$

を求めよ.

8. 任意の自然数 n に対して

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^n}dx = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}\pi$$

を証明せよ.

9. $\mathbb{C}$ の領域 D 上の正則関数 f について，ある自然数 n があって，$f^{(n+1)}(z) = 0,\ z \in D$ が成り立つならば，f は高々 n 次の多項式であることを示せ．

10. 整関数 f について，ある自然数 n と定数 $R > 0,\ c > 0$ があって，$|z| > R$ ならば，$|f(z)| \le c|z|^n$ が成り立つとする．このとき，f は高々 n 次の多項式であることを証明せよ．

11. $R > 0$ とする．次の関数 f の，$|z| \le R$ における最大値とそれを実現する点を求めよ．

(i) $f(z) = z^n - z \quad (n \ge 2,\ n \in \mathbb{N})$.

(ii) $f(z) = z^n e^z \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$.

(iii) $f(z) = z^n e^{z^2} \quad (n \in \{0\} \cup \mathbb{N})$.

12. $|z| \le R$ ならば，$|\sin z| \le \left(\dfrac{\cosh R}{R}\right)|z|$ が成り立つことを示せ．

5 複素無限級数と正則関数の諸性質

永遠から遠く
歩いている
永遠から永遠に
離れて
歩いている
女神の意識は
無限の空間の意識だ

—西脇順三郎「えてるにたす」より[1]

5.1 複素無限級数の定義と基本的性質

実数列からつくられる無限級数 — 実無限級数 — の初等的理論については，読者はすでに学んでいるものとして話を進める．複素数列からつくられる無限級数の理論は，実無限級数の理論の自然な拡張であり，その理論構成は，実無限級数の理論のそれとまったく並行的である．

複素数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(\alpha_n \in \mathbb{C})$ の第 $N \in \mathbb{N}$ 項までの和 $S_N := \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$ — 第 N **部分和**とよぶ — からつくられる複素数列 $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ が極限値 S をもつとき，すなわち，$\lim_{N\to\infty} S_N = S$ が存在するとき，$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対する**複素無限級数** (infinite series) — 象徴記号的に $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$，または $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ と記す — は**収束する**といい，S をその**和**とよぶ．この場合，記号的に，$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = S$，または，$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots = S$，というふうに書き表す．これは，厳密に述べるならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 N_0 があって，$N \geq N_0$ ならば

[1] 西脇順三郎 (1894–1982)．現代詩における前人未踏の領域を開拓した天才的詩人．西脇順三郎『詩と詩論 I〜VI』（筑摩書房）はたいへん魅力的．

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n - S\right| < \varepsilon \tag{5.1}$$

が成り立つということである．

収束しない複素無限級数は**発散** (divergence) するという．

誤解のおそれがない場合，複素無限級数のことを単に無限級数，または級数ともよぶ．

【定理 5.1】 複素無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ が収束するならば，$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$.

証明 $S = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ とおく．$\alpha_n = S_n - S_{n-1}$ であり，$\lim_{n\to\infty}S_n = S = \lim_{n\to\infty}S_{n-1}$ であるから，$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = S - S = 0$. ∎

複素数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\mathrm{Re}\,\alpha_n = a_n$, $\mathrm{Im}\,\alpha_n = b_n$ とおけば $\alpha_n = a_n + ib_n$ $(a_n, b_n \in \mathbb{R})$ と書ける．この場合に次の事実が見出される：

【命題 5.2】 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ が収束するための必要十分条件は $\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \sum_{n=1}^{\infty}b_n$ がともに収束することである．その場合

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty}a_n + i\sum_{n=1}^{\infty}b_n \tag{5.2}$$

が成り立つ．

証明 （必要性） $S := \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ は収束するとする．したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 N_0 があって，$N \geq N_0$ ならば (5.1) が成り立つ．任意の複素数 z に対して，$|\mathrm{Re}\,z| \leq |z|, |\mathrm{Im}\,z| \leq |z|$ であるから，$S = S_1 + iS_2 (S_1, S_2 \in \mathbb{R})$ とすれば，$|\sum_{n=1}^{N}a_n - S_1| < \varepsilon, |\sum_{n=1}^{N}b_n - S_2| < \varepsilon, N \geq N_0$．これは，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ がともに収束し，$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty}b_n$ を意味する．したがって，(5.2) が成立する．

（十分性） $S_1 := \sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $S_2 := \sum_{n=1}^{\infty}b_n$ がともに収束するとしよう．任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して，$\sum_{n=1}^{N}\alpha_n = \sum_{n=1}^{N}a_n + i\sum_{n=1}^{N}b_n$．したがって，命題 2.7 の応用により，$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\alpha_n = S_1 + iS_2$．ゆえに $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ は収束し，(5.2) が成立する． ∎

【定理 5.3】 複素数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = A, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = B$ が成り立つならば，任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ に対して，$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda\alpha_n + \mu\beta_n)$ は収束し

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda\alpha_n + \mu\beta_n) = \lambda A + \mu B.$$

証明　実数列の無限級数の場合と同様.（または $\alpha_n = a_n + ib_n, \beta_n = c_n + id_n$ $(a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{R})$ として命題 5.2 を応用すればよい.）　■

複素無限級数に対しても，実数列の無限級数の場合と同様に，絶対収束性の概念が定義される：

【定義 5.4】 複素数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ が収束するとき, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ は**絶対収束** (absolute convergence) するという.

【補題 5.5】 $\alpha_n = a_n + ib_n\,(a_n, b_n \in \mathbb{R})$ とする．$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ が絶対収束するための必要十分条件は，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに絶対収束することである.

証明　任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{n=1}^{N} |\alpha_n| \leq \sum_{n=1}^{N} |a_n| + \sum_{n=1}^{N} |b_n|, \quad \sum_{n=1}^{N} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|, \quad \sum_{n=1}^{N} |b_n| \leq \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|$$

が成り立つことに注意すればよい.　■

【定理 5.6】 複素無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ が絶対収束するならば，$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ は収束し，しかも $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ の項の順序を任意に入れ換えてできる級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{n_k}$ も絶対収束し，$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{n_k}$ が成り立つ.

証明　$\alpha_n = a_n + ib_n$ $(a_n, b_n \in \mathbb{R})$ とすれば，補題 5.5 によって，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は絶対収束する．したがって，絶対収束する実無限級数の性質により，$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_{n_k}$ も絶対収束し，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_{n_k}$ が成り立つ．ゆえに題意が成立する.　■

次の定理は応用上も有用である.

【定理 5.7】 2 つの複素無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ がいずれも絶対収束するならば

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_1\beta_n + \alpha_2\beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n\beta_1) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n\right) \tag{5.3}$$

が成立し，左辺の級数も絶対収束する．

式 (5.3) の左辺の級数は**コーシーの乗積級数**とよばれる（同じ型の実無限級数の名称の流用）．この定理の証明は，実無限級数の対応する定理の証明と同様であるので，省略する．

5.2 複素関数項級数

5.2.1 複素関数列

微分積分学において，「実関数（実数値関数）の列」という概念に出会う．この概念も複素関数の場合へと拡張することができる．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathbb{C}$ の部分集合 S（領域である必要はない）において定義された複素関数 $f_n : S \to \mathbb{C}$ が与えられたとする．このような関数の組 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を S 上の**関数列**という．単に関数列 f_n と言い方もする．

【定義 5.8】 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を S 上の関数列とする．

(i) 各 $z \in S$ に対して，極限 $\lim_{n\to\infty} f_n(z)$ が存在するとき，関数列 f_n は S 上で**収束する**という．この場合，$f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z), z \in S$ によって定義される写像 $f : S \to \mathbb{C}$ をその**極限関数**あるいは単に**極限**という．このことを「f_n は S 上で f に**各点収束**する」あるいは単に「f_n は S 上で f に収束する」という．

(ii) S 上で定義された関数 f があって，$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in S} |f_n(z) - f(z)| = 0$ が成り立つならば，f_n は f に S 上で**一様収束**するという．

特に，S がある点 $a \in \mathbb{C}$ のひとつの近傍であるとき，f_n が f に S 上で一

様収束することを「f_n は f に点 a で一様収束する」ともいう[2]．

(iii) S 上で定義された関数 f があって，S に含まれる任意の有界閉集合 K に対して，$\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in K}|f_n(z)-f(z)|=0$ が成り立つならば，f_n は f に D 上で**広義一様収束**するという．

!注意 5.1　上の定義の (ii) は次のように述べられる．任意の $\varepsilon>0$ に対して，番号 n_0 があって，$n\geq n_0$ ならば，$\sup_{z\in S}|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$．したがって

$$|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon, \quad \forall z\in S, \quad \forall n\geq n_0. \tag{5.4}$$

これは，どの $z\in S$ に対しても，$f_n(z)-f(z)$ の絶対値が一様に ε で抑えられることを示す．（一様収束という命名はこのことに由来する．）したがって，特に，$\lim_{n\to\infty}f_n(z)=f(z)$．すなわち，一様収束は各点収束を意味する．だが，この逆は成立しない．つまり，関数列は収束しても一様収束するとは限らない（次の例を参照）．

■ **例 5.1** ■　$f_n(z)=e^{-nz}$ $(n\in\mathbb{N})$ とすれば，$|f_n(z)|=e^{-nx}$ $(z=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R})$．そこで $\mathbb{C}_+:=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}\,z>0\}$ とすれば，$\lim_{n\to\infty}f_n(z)=0, z\in\mathbb{C}_+$．しかし，$\sup_{z\in\mathbb{C}_+}|f_n(z)|=1$ であるので，この関数列 f_n は $\mathbb{C}_+$ 上では 0 に一様収束はしない．一方，$\sigma>0$ を任意にとり，$S_\sigma:=\{z\in C\mid \mathrm{Re}\,z\geq\sigma\}$ とすれば，$\sup_{z\in S_\sigma}|f_n(z)|=e^{-n\sigma}$ となるので，$\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in S_\sigma}|f_n(z)|=0$．ゆえに，$f_n$ は S_σ 上では 0 に一様収束する．

関数列の一様収束に関する基本的特徴づけは次の定理によって与えられる：

【定理 5.9】　$\mathbb{C}$ の部分集合 S 上で定義された複素関数列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が S 上である関数に一様収束するための必要十分条件は，任意の $\varepsilon>0$ に対して，番号 n_0 があって，$n,m\geq n_0$ ならば $|f_n(z)-f_m(z)|<\varepsilon, \forall z\in S$ が成り立つことである．

証明　（必要性）　$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が S 上の関数 f に一様収束しているとしよう．したがって，(5.4) が成り立つ．ゆえに，任意の $m,n\geq n_0$ に対して

$$|f_n(z)-f_m(z)|\leq|f_n(z)-f(z)|+|f(z)-f_m(z)|<2\varepsilon,\ \forall z\in S.$$

---

[2] つまり，「f_n が f に点 a で一様収束する」というのは，点 a のある近傍 U があって，$\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in U}|f_n(z)-f(z)|=0$ が成り立つことである．この場合の「点 a で」という意味は，文字通り「1 点 a で」という意味ではなく，点 a のある近傍でという意味である．この点は，言葉の使い方の問題であるが，留意されたい．

$\varepsilon>0$ は任意であったから，2ε を改めて ε とすれば，題意が成立する．

(十分性) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 n_0 があって，$n, m \geq n_0$ ならば $|f_n(z)-f_m(z)|<\varepsilon, \forall z \in S \cdots (*)$ が成り立つとする．これは，$z \in S$ を1つ固定するとき，$\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{C}$ のコーシー列であることを意味する．したがって，$\mathbb{C}$ の完備性により，$\alpha_z := \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ は存在する．そこで，写像 $f: S \to \mathbb{C}$ を $f(z) := \alpha_z$, $z \in S$ によって定義すれば，f は S 上の複素関数である．$(*)$ において，$m \to \infty$ とすれば，すべての $n \geq n_0$ に対して，$|f_n(z)-f(z)| \leq \varepsilon$, $\forall z \in S$. したがって，$\sup_{z\in S}|f_n(z)-f(z)| \leq \varepsilon$, $n \geq n_0$. これは，f_n が f に S 上で一様収束することを意味する． ∎

この定理の十分条件は，与えられた関数列が一様収束することを示すために使われる．

一様収束性あるいは広義一様収束性の重要な側面の一端が次の定理に見られる．

【定理 5.10】 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を集合 $S \subset \mathbb{C}$ において連続な関数の列とする．

(i) 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が S 上で関数 f に一様収束すれば，f は S 上で連続である．

(ii) S が開集合で，関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が S 上で関数 f に広義一様収束すれば，f は S 上で連続である．

証明 (i) 仮定により，任意の $\varepsilon>0$ に対して，番号 n_0 があって，(5.4) が成り立つ．$z, a \in S$ を任意にとる．このとき，恒等変形 $f(z)-f(a)=(f(z)-f_n(z))+(f_n(z)-f_n(a))+(f_n(a)-f(a))$ と3角不等式により

$$|f(z)-f(a)| \leq |f(z)-f_n(z)|+|f_n(z)-f_n(a)|+|f_n(a)-f(a)|.$$

したがって，$n \geq n_0$ ならば，$|f(z)-f(a)|<2\varepsilon+|f_n(z)-f_n(a)|$. f_n は連続であるから，$z \to a$ の極限をとれば，$0 \leq \limsup_{z\to a}|f(z)-f(a)| \leq 2\varepsilon$. そこで，$\varepsilon \downarrow 0$ とすれば，$\limsup_{z\to a}|f(z)-f(a)|=0$. したがって，$\lim_{z\to a}|f(z)-f(a)|=0$. ゆえに f は a で連続である．a は S の任意の点であったから，f は S 上で連続である．

(ii) S は開集合であるから，任意の $a \in S$ に対して，$U_\rho(a) \subset S$ となる $\rho>0$ が存在する．そこで，$r=\rho/2$ とすれば，$\overline{U_r(a)} \subset U_\rho(a)$. したがって，$\overline{U_r(a)}$ は

S に含まれる有界閉集合である．これと仮定により，f_n は f に $\overline{U_r(a)}$ 上で一様収束する．したがって，(i) により，f は $\overline{U_r(a)}$ 上で連続である．a は S の任意の点であったから，題意がしたがう． ∎

次の定理は極限と積分の順序交換可能性に関するものであり，理論上も応用上も極めて重要である：

【定理 5.11】 $C:[a,b]\to\mathbb{C}$ を区分的に連続微分可能な曲線とする．関数 f, f_n $(n\in\mathbb{N})$ は C の像（値域）$\mathrm{R}(C)$ を含む領域で連続であり，f_n は，$\mathrm{R}(C)$ 上で，f に一様収束しているとする．このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)dz=\int_C f(z)dz. \tag{5.5}$$

証明　仮定により，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$n_0\in\mathbb{N}$ があって，$n\geq n_0$ ならば，$\sup_{z\in\mathrm{R}(C)}|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$ が成り立つ．したがって，定理 4.7-(iv) を応用すれば

$$\left|\int_C f_n(z)dz-\int_C f(z)dz\right|\leq\Big(\sup_{z\in\mathrm{R}(C)}|f_n(z)-f(z)|\Big)L(C)\leq\varepsilon L(C),\quad n\geq n_0.$$

ゆえに (5.5) が成立する． ∎

5.2.2　複素関数列の無限級数 —— 複素関数項級数

$\mathbb{C}$ の部分集合 S で定義された複素関数列 f_n $(n=1,2,\cdots)$ が与えられたとしよう．このとき，各 $N\in\mathbb{N}$ に対して，S 上の関数 F_N が $F_N:=\sum_{n=1}^N f_n$ によって定義される $(F_N(z):=\sum_{n=1}^N f_n(z),\ z\in S)$．もし，各 $z\in S$ に対して，$f(z):=\lim_{N\to\infty}F_N(z)$ が存在するならば，**関数項級数** $\sum_{n=1}^\infty f_n$ は S 上で**収束する**という．この場合，対応 $f:z\mapsto f(z)$ は S 上の複素関数を定める．そこで

$$f=\sum_{n=1}^\infty f_n$$

と記し，f を関数項級数 $\sum_{n=1}^\infty f_n$ の和とよぶ．定義から，明らかなように

$$f(z)=\sum_{n=1}^\infty f_n(z),\quad z\in S.$$

一般に，S 上の関数 g が，ある複素関数列 g_n $(n=1,2,\cdots)$（その定義域は S を含むとする）に付随する関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ に等しいとき (i.e., $g=\sum_{n=1}^{\infty} g_n$)，$g$ は S 上で関数列 $\{g_n\}_n$ によって**級数展開**されるという．

任意の $\varepsilon>0$ に対して番号 N_0 があって，$N \geq N_0$ ならば

$$\sup_{z\in S}\left|\sum_{n=1}^{N} f_n(z)-f(z)\right| \leq \varepsilon$$

が成り立つとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は S 上で関数 f に**一様収束**するという．（これは，関数列 F_N が f に一様収束するということ．）

特に，S がある点 $a \in \mathbb{C}$ の 1 つの近傍であるとき，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が f に S 上で一様収束することを「$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は f に点 a で一様収束する」ともいう．

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ が S 上で関数 f に一様収束し，しかもそれが絶対収束であるとき，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は S 上で**一様絶対収束**するという．

! 注意 5.2　関数項級数の一様収束性と絶対収束性は独立な概念である．すなわち，一様収束するが絶対収束はしない関数項級数もあるし，絶対収束するが一様収束はしない関数項級数もある（演習問題 2, 3 を参照）．

S に含まれるの任意の有界閉集合 K に対して，K 上で級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ が関数 $f(z)$ に一様収束するとき，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は関数 $f(z)$ に S 上で**広義一様収束**するという．

関数項級数の一様収束性に関する次の定理は基本的である．

【定理 5.12】　$S \subset \mathbb{C}$ で定義された関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ が S 上で一様収束するための必要十分条件は，任意の $\varepsilon>0$ に対して，番号 n_0 があって，$N \geq n_0$ ならば

$$|f_{N+1}(z)+f_{N+2}(z)+\cdots+f_{N+p}(z)|<\varepsilon, \quad \forall z \in S, \quad \forall p \in \mathbb{N} \tag{5.6}$$

が成り立つことである．

証明　$N \in \mathbb{N}$ に対して，$S_N(z):=\sum_{n=1}^{N} f_n(z)$ とおくと，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ が S 上で一様収束するための必要十分条件は，関数列 $\{S_N(z)\}_{N=1}^{\infty}$ が S 上で一様収束することである．したがって，定理 5.9 により，それは，任意の $\varepsilon>0$ に対して，

番号 n_0 があって，$N, M \geq n_0$ ならば

$$|S_N(z) - S_M(z)| < \varepsilon, \quad z \in S \tag{5.7}$$

が成り立つことと同値である．$M > N$ ならば，$p = M - N$ とすることにより，(5.7) は (5.6) を導く．また，$N > M$ ならば，$p = N - M$ とし，M を改めて N とすれば，(5.6) が得られる．ゆえに題意が成立する．∎

この定理の十分条件は，与えられた関数項級数が一様収束することを示すために用いられる．

次の定理は，関数項級数の一様絶対収束性に対する強力な判定条件のひとつを提供する：

【定理 5.13】(ヴァイエルシュトラースの M 判定法)　各 n に対して定数 $M_n > 0$ が存在して，

$$|f_n(z)| \leq M_n, \quad z \in S$$

が成り立ち —— 換言すれば，$\sup_{z \in S} |f_n(z)| \leq M_n$ —— かつ $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が収束するならば，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は S 上で一様絶対収束する．

証明　$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ の収束性により，各 $z \in S$ に対して，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は絶対収束する．したがって，$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ が存在する．$F_N(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n(z)$ とおくと $L > N$ $(N, L \in \mathbb{N})$ ならば $|F_N(z) - F_L(z)| = |\sum_{n=N+1}^{L} f_n(z)| \leq \sum_{n=N+1}^{L} |f_n(z)| \leq \sum_{n=N+1}^{L} M_n$．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 n_0 があって，$L > N \geq n_0$ ならば，$\sum_{n=N+1}^{L} M_n < \varepsilon$．したがって，$L > N \geq n_0$ ならば $|F_N(z) - F_L(z)| < \varepsilon$．そこで，$L \to \infty$ とすれば，$|F_N(z) - f(z)| \leq \varepsilon, n \geq n_0$．$n_0$ は z に依存していないから，$\sup_{z \in S} |F_N(z) - f(z)| \leq \varepsilon, n \geq n_0$．ゆえに $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は S 上で f に一様収束する．∎

次の定理は絶対収束するとは限らない関数項級数の一様収束性を示すのにしばしば有用である：

【定理 5.14】　$S \subset \mathbb{C}$ で定義された関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は次の条件 (i), (ii) をみたすとする：(i) $\sup_{z \in S} |f_n(z)| \to 0$ $(n \to \infty)$; (ii) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，定数 $M_n > 0$

があって，$|f_n(z)+f_{n+1}(z)| \leq M_n$, $n \in \mathbb{N}$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$. このとき，関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は S 上で一様収束する．

証明 $g_m(z) := f_{2m-1}(z) + f_{2m}(z)$, $z \in S$ とおくと，$|g_m(z)| \leq M_{2m-1}$ であり，$\sum_{m=1}^{\infty} M_{2m-1} < \sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$ であるから，ヴァイエルシュトラースの M 判定法により，$\sum_{m=1}^{N} g_m(z)$ は $N \to \infty$ のとき，S 上で，ある関数 $G(z)$ に一様絶対収束する．$S_N(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n(z)$ とすれば，$S_{2M}(z) = \sum_{m=1}^{M} g_m(z)$. したがって, $S_{2M}(z)$ は, $M \to \infty$ のとき, S 上で $G(z)$ に一様絶対収束する．さらに，$S_{2M+1}(z) = S_{2M}(z) + f_{2M+1}(z)$ であるから，$|S_{2M+1}(z) - G(z)| \leq |S_{2M}(z) - G(z)| + |f_{2M+1}(z)|$. したがって，$\sup_{z\in S} |S_{2M+1}(z) - G(z)| \leq \sup_{z\in S} |S_{2M}(z) - G(z)| + \sup_{z\in S} |f_{2M+1}(z)| \to 0$ $(M \to \infty)$. ゆえに，$S_{2M+1}(z)$ も，$M \to \infty$ のとき，S 上で $G(z)$ に一様収束する．以上から，$\{S_N(z)\}_{N=1}^{\infty}$ は，$N \to \infty$ のとき，S 上で一様収束することが結論される．ゆえに題意が成立する． ∎

一様収束性の重要性は，次の定理にも見られる．

【定理 5.15】(項別積分定理) $C : [a,b] \to \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$ を区分的に連続微分可能な曲線とし，関数列 f_n $(n = 1, 2, \cdots)$ は C の像 $\mathrm{R}(C)$ を含む領域で連続であるとする．さらに，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は $\mathrm{R}(C)$ 上で一様収束するとしよう．このとき

$$\int_C \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n(z) dz. \tag{5.8}$$

証明 $F_N(z) := \sum_{n=1}^{N} f_n(z)$, $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, $z \in \mathbb{R}(C)$ とおくと，(5.8) は $\lim_{N\to\infty} \int_C F_N(z)dz = \int_C f(z)dz \cdots (*)$ と同値である．仮定により，F_N は，$\mathrm{R}(C)$ 上で，f に一様収束するので，定理 5.11 を応用すれば，$(*)$ が得られる． ∎

5.3 正則関数列

複素平面 $\mathbb{C}$ の領域 D で定義された関数 f_n の列 $\{f_n\}_n$ において，各 f_n が D 上で正則であるとき，この関数列を D 上の**正則関数列**とよぶ．この節では，このクラスの関数列の性質を調べる．

【定理 5.16】 D を $\mathbb{C}$ の領域とし，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を D 上の正則関数列とし，これが D 上の関数 f に収束しているとする：$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$, $z \in D$．しかも，この収束は D の各点で一様であるとする．(i.e., 各 $a \in D$ に対して，定数 $\delta > 0$ があって，$|z-a| < \delta$ ならば，$z \in D$ かつ $\lim_{n\to\infty} \sup_{|z-a|<\delta} |f_n(z) - f(z)| = 0$.）このとき，$f$ も D 上で正則である．さらに，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，f_n の k 階の導関数 $f_n^{(k)}$ は D の各点で $f^{(k)}$ に一様収束する．

証明　$a \in D$ とし，$\delta > 0$ を上述のものとする．$C(t) = a + (\delta/2)e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ とすれば，コーシーの積分表示により

$$f_n(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(z)}{z-a}dz.$$

このとき

$$\sup_{|z-a|=\delta/2}\left|\frac{f_n(z)}{z-a} - \frac{f(z)}{z-a}\right| \\ \leq \frac{2}{\delta}\sup_{|z-a|<\delta}|f_n(z) - f(z)| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であるので，関数 $f_n(z)/(z-a)$ は，C 上で $f(z)/(z-a)$ に一様収束する．したがって，上の式で $n \to \infty$ とすれば，定理 5.11 によって

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

これと定理 4.18 の証明から，f は点 a で微分可能であることがわかる．$a \in D$ は任意であったから，f は D 上で正則である．

系 4.19 によって

$$f_n^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(z)}{(z-a)^{k+1}}dz, \quad k \in \mathbb{N}.$$

k を固定するとき，関数列 $f_n(z)/(z-a)^{k+1}$ は $f(z)/(z-a)^{k+1}$ に C 上で一様収束する（証明は前段の場合と同様）．したがって，再び，定理 5.11 によって

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}dz = f^{(k)}(a).$$

この収束が点 a で一様であることを示そう．$|w-a| < \delta/4$ とする．このとき，$|z-w| \geq |z-a| - |a-w| \geq \delta/4$ であるから

$$|f_n^{(k)}(w) - f^{(k)}(w)| \leq 2\left(\frac{4}{\delta}\right)^k k! \sup_{|z-a|=\delta/2}|f_n(z) - f(z)|.$$

したがって

$$\sup_{|w-a|<\delta/4}\left|f_n^{(k)}(w)-f^{(k)}(w)\right|$$
$$\leq 2\left(\frac{4}{\delta}\right)^k k! \sup_{|z-a|=\delta/2}|f_n(z)-f(z)| \to 0, \quad n\to\infty.$$

ゆえに，収束 $\lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(w)=f^{(k)}(w)$ は a の十分小さい近傍で一様である．∎

定理 5.16 を正則関数列の無限級数に応用することにより次の結果を得る．

【定理 5.17】 $\mathbb{C}$ の領域 D において正則な関数列 $f_n\ (n=1,2,\cdots)$ の無限級数 $F(z):=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は D の各点で一様収束しているとする．このとき，F も D 上で正則であり

$$F^{(k)}(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \quad z\in D, \quad k\in\mathbb{N}$$

が成り立つ (**項別微分可能**)．この収束も D の各点で一様収束である．

証明 定理 5.16 を f_n, f がそれぞれ，$F_n(z)=\sum_{j=1}^{n} f_j(z)$, F の場合に応用すればよい．∎

■ **例 5.2** ■ （**リーマンのゼータ関数**） 関数列 $f_n(z)=1/n^z=e^{-z\log n}$ $(n=1,2,\cdots)$ を考える．各関数 f_n は整関数である．容易にわかるように，$|f_n(z)|\leq 1/n^{\mathrm{Re}\,z}$．したがって，任意の $\sigma>1$ に対して，領域 $R_\sigma:=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}\,z>\sigma\}$ において，$|f_n(z)|\leq 1/n^\sigma$ であり，$\sum_{n=1}^{\infty}1/n^\sigma$ は収束するから，ヴァイエルシュトラースの M 判定法により，$\sum_{n=1}^{\infty}1/n^z$ は R_σ 上で一様絶対収束する．したがって，$\mathrm{Re}\,z>1$ で正則な関数を

$$\zeta(z):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}, \quad \mathrm{Re}\,z>1 \tag{5.9}$$

によって定義することができる．この関数を**リーマンのゼータ関数** (Riemann's zeta function) という．この関数は，整数論において重要な役割を演じる関数であり，数理物理学においてもいろいろなところに現れる．

5.4 整級数

微分積分学で学ぶように，実数 x と実数列 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ から定まる関数項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ は整級数とよばれる．この級数の概念も複素数の場合へと拡張される．すなわち，関数列 f_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ が $f_n(z) = \alpha_n(z - z_0)^n$ $(\alpha_n, z_0 \in \mathbb{C}$ は定数）という形で与えられる場合の級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(z-z_0)^n = \alpha_0+\alpha_1(z-z_0)+\alpha_2(z-z_0)^2+\cdots+\alpha_n(z-z_0)^n+\cdots \quad (5.10)$$

を点 z_0 を中心とする**冪級数** (power series)，または**整級数**という．

整級数 (5.10) が $|z - z_0| < \rho$ （$\rho > 0$ は定数）で収束し，$|z - z_0| > \rho$ で発散するとき，ρ を (5.10) の**収束半径** (radius of convergence) という．この場合，$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \rho\}$ を整級数 (5.10) の**収束円**とよぶ．

なお，整級数 (5.10) がすべての $z \in \mathbb{C}$ に対して収束するとき，その収束半径 ρ は無限大であるといい，この場合，$\rho = +\infty$ と記す．

また，整級数 (5.10) が $z \neq z_0$ ならば収束しないとき，その収束半径 ρ は 0 であると規約し，$\rho = 0$ と記す．

一般に，複素関数 f が，点 z_0 の近傍で (5.10) の型の整級数で表されるとき，f は**点 z_0 で整級数に展開される**，あるいは**整級数展開をもつ**という．この場合，α_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ をその**展開係数**とよぶ．

■ **例 5.3** ■　原点を中心とする整級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$$

$(z \in \mathbb{C})$ を**複素幾何級数**，あるいは**複素等比級数**とよぶ．

$N \in \mathbb{N}$ に対して，$S_N = 1 + z + \cdots + z^N = \sum_{n=0}^{N} z^n$ とする．第1章演習問題 20-(i) により，$S_N = (1 - z^{N+1})/(1 - z)$．これから，次のことがわかる：(i) $|z| < 1$ ならば，$\lim_{N\to\infty} S_N = 1/(1 - z)$．(ii) $|z| > 1$ ならば，$\lim_{N\to\infty} S_N$ は存在しない[3]．よって，複素幾何級数の収束半径は 1 であり

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1$$

[3] $|z| > 1$ ならば，$|z^{N+1}| = |z|^{N+1} \to \infty$ $(N \to \infty)$ に注意．

が成り立つ．

$w = z - z_0$ とおくことにより，点 z_0 を中心とする冪級数は原点を中心とする冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n w^n$ として表すことができる．したがって，冪級数の一般論においては，原点を中心とする冪級数を考えれば十分である．そこで，次の級数を考える：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_n z^n + \cdots . \tag{5.11}$$

【定理 5.18】 整級数 (5.11) の収束半径を ρ とする．このとき：

(i) (5.11) は $|z| < \rho$ で絶対収束する．

(ii) 任意の $r < \rho$ に対して，(5.11) は $|z| \leq r$ で一様収束する．

(iii) $\rho < \infty$ ならば，(5.11) は $|z| > \rho$ で発散する．

証明 収束半径の定義により，$|z| < \rho$ ならば，$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ は収束する．したがって，$\lim_{n\to\infty} \alpha_n z^n = 0$ であるから，点列 $\{\alpha_n z^n\}_n$ は有界である．すなわち，z に依存する定数 $M(z) > 0$ があって，$|\alpha_n||z|^n = |\alpha_n z^n| \leq M(z)$．いま，$r \in (0, \rho)$ を任意に選ぶ．このとき，$r_0 := (r + \varepsilon) < \rho$ をみたす $\varepsilon > 0$ がとれる．$|z| \leq r$ をみたす任意の z に対して $|\alpha_n||z|^n = |\alpha_n| r_0^n (|z|/r_0)^n \leq M(r_0)(r/r_0)^n$，$n \in \mathbb{N}$．$r/r_0 < 1$ であるから，$\sum_{n=0}^{\infty} (r/r_0)^n = 1/(1 - r/r_0) < +\infty$．したがって，ヴァイエルシュトラースの M 判定法により，$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ は $|z| \leq r$ において，一様絶対収束する．$r \in (0, \rho)$ は任意であるから，(i) と (ii) の主張が同時に証明されたことになる．

(iii) は収束半径の定義から自明．■

整級数の収束半径は次の定理から求めることができる．これは応用上重要である．

【定理 5.19】 整級数 (5.11) の収束半径を ρ とする．

(i) $\rho = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|}}$．ただし，$\dfrac{1}{+\infty} := 0$，$\dfrac{1}{0} := +\infty$ と規約する．

(ii) $\lim_{n\to\infty}|\alpha_n/\alpha_{n+1}|$ が存在するならば（$+\infty$ の場合も含む）

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right|.$$

証明　実数の整級数の場合と同様（微分積分学の本を参照）. ∎

■ **例 5.4** ■　複素幾何級数（例 5.3）においては，$\alpha_n = 1$ であるから，定理 5.19 を応用すれば，その収束半径が 1 であることはただちにわかる.

■ **例 5.5** ■　$a \geq 0$，$m, k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $m \geq k$ とするとき，整級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m-k)^a(n+m-k+1)^a \cdots (n+m)^a}{n!} z^n$$

の収束半径を求めよ.

解　$\alpha_n = (n+m-k)^a \cdots (n+m)^a/n!$ であるから，

$$\left|\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right| = (n+1)\left(\frac{n+m-k}{n+1+m}\right)^a \to +\infty \quad (n \to +\infty).$$

したがって，収束半径は $+\infty$ である. ∎

【定理 5.20】　2 つの整級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n$ の収束半径をそれぞれ ρ_f, ρ_g とし，$R = \min\{\rho_f, \rho_g\}$ とおく. もし，$R > 0$ ならば，次の (i), (ii) が成り立つ：

(i) $$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n)\, z^n = f(z) + g(z), \quad |z| < R.$$

(ii) $$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_0\beta_n + \alpha_1\beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n\beta_0)\, z^n = f(z)g(z), \quad |z| < R.$$

証明　実数の整級数の場合と同様. ∎

次の定理は重要である：

【定理 5.21】　整級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ の収束半径を ρ とする. このとき，次の (i)〜(iv) が成り立つ：

(i) $f(z)$ は $|z| < \rho$ で正則である．

(ii) **（項別微分可能定理）** $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n z^{n-1}, \quad |z| < \rho.$

(iii) **（項別積分可能定理）** $\int_0^z f(\zeta)d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n+1} z^{n+1}, \quad |z| < \rho.$

(iv) $\alpha_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n \geq 0.$

証明

(i) 各 $N \in \mathbb{N}$ に対して，$F_N(z) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n z^n$ とすれば，これは整関数である．したがって，定理 5.18-(ii) と定理 5.17 によって，題意がしたがう．

(ii) (i) と同様に，定理 5.17 を応用すればよい．

(iii) 定理 5.15 を応用すればよい．

(iv) $f(0) = \alpha_0$ は明らか．(ii) を繰り返し使うと

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\alpha_n z^{n-k}, \quad |z| < \rho,\ k \geq 1.$$

したがって，$f^{(k)}(0) = k!\alpha_k$．ゆえに，$\alpha_k = f^{(k)}(0)/k!$． ∎

上の定理の (iv) は，整級数の展開係数が一意的に定まることを示す[4)]．この性質を**整級数展開の一意性**という．

5.5 正則関数の整級数展開とヴァイエルシュトラースの2重級数定理

正則関数は整級数に展開される：

【定理 5.22】 点 $a \in \mathbb{C}$ を中心とする半径 R の円の内部で正則な任意の関数 f に対して

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n$ $(\beta_n \in \mathbb{C})$ ならば，$\alpha_n = \beta_n$, $n \geq 0$ ということ．

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \quad |z-a| < R \tag{5.12}$$

が成り立つ．この展開は一意的である．

証明　証明のアイデアはコーシーの積分表示（定理 4.17）を利用することである．いま，a を中心とする，半径 r $(0 < r < R)$ の円を像とする曲線 $C(t) = a + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$ を考えると，C の内部の任意の点 z に対して

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

任意の $\zeta \in \mathsf{R}(C)$ に対して，$|z-a| < r = |\zeta - a|$．したがって，$|z-a|/|\zeta-a| < 1$ であるので，例 5.3 によって

$$\frac{1}{1 - \left(\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n.$$

ゆえに

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)-(z-a)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\cdot\frac{1}{1-\left(\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right)}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}(z-a)^n.$$

さらに，$M := \sup_{\zeta\in\mathsf{R}(C)}|f(\zeta)|$ は有限であり

$$\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}(z-a)^n\right| \le \frac{M|z-a|^n}{r^{n+1}}, \quad \forall\zeta \in \mathsf{R}(C).$$

一方，級数 $\sum_{n=0}^{\infty}|z-a|^n/r^{n+1}$ は収束する．したがって，ヴァイエルシュトラースの M 判定法により，級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}(z-a)^n$ は $\mathsf{R}(C)$ 上で一様収束する．ゆえに項別積分定理（定理 5.15）を応用することができるので

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right)(z-a)^n.$$

一方，すでに知っているように

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

こうして (5.12) が得られる．展開の一意性は整級数展開の一意性による． ∎

整級数 (5.12) を f の，点 a における**テイラー級数** (Taylor series)，または**テイラー展開** (Taylor expansion) という[5]．これは，言うまでもなく，関数 $f(z)$ が点 a の近傍で $\sum_{n=0}^{N} f^{(n)}(a)(z-a)^n/n!$ という形の多項式で近似されること，しかも，それが任意の精度で可能であること（もちろん，その精度に応じて N を十分大きくとる）を示している．

上の設定において，$a=0$ の場合には

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \cdots, \quad |z| < R \tag{5.13}$$

である．この場合，右辺の級数を**マクローリン級数** (Maclaurin series) といい，これを f の**マクローリン展開**という[6]．

定理 5.22 の際立った性格を洞察するために，実数体 $\mathbb{R}$ の区間 J 上の，無限回微分可能な実数値関数 $f: J \to \mathbb{R}$ の場合には，f がある種の条件をみたさなければ，f は，一般には，テイラー級数に展開されないことを想起しよう（微分積分学の本を参照）．だが，ここで注目すべきは，定理 5.22 にはその種の条件は必要とされない，という一事である．これは，まことに，驚嘆すべき事柄である．ここにも正則関数の驚異的な美しさの一端が現れている．

■ **例 5.6** ■　$f(z) = e^z$ は整関数であり，$f^{(n)}(0) = 1$ $(f^{(n)}(z) = e^z)$ であるから

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}z^n, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{5.14}$$

同様に，整関数 $\sin z, \cos z$ に対して，次のマクローリン展開式を得る[7]：

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{5.15}$$

---

[5] Brook Taylor (1685–1731). イギリスの数学者.

[6] Colin Maclaurin (1698–1746). イギリス（スコットランド）の数学者.

[7] $n \geq 0$ に対して, $(\sin z)^{(2n)} = (-1)^n \sin z$, $(\sin z)^{(2n+1)} = (-1)^n \cos z$, $(\cos z)^{(2n)} = (-1)^n \cos z$, $(\cos z)^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \sin z$ であることに注意.

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{5.16}$$

$$\tan z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2}{15} z^5 + \cdots, \quad |z| < \pi/2. \tag{5.17}$$

これらはいずれも重要な展開式である．

マクローリン展開の重要な応用のひとつを述べておく．

【定理 5.23】(ヴァイエルシュトラースの 2 重級数定理)　自然数 m ごとに定まる冪級数 $f_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(m)} z^n$ ($\alpha_n^{(m)} \in \mathbb{C}$) が $|z| < R$ ($R > 0$ は定数) で収束し，かつこの領域で

$$f(z) := \sum_{m=1}^{\infty} f_m(z)$$

が広義一様収束するとする．このとき

$$\alpha_n := \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^{(m)} \tag{5.18}$$

は収束し，f は $|z| < R$ で正則であり

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \tag{5.19}$$

が成り立つ．

証明　定理 5.17 を応用すれば，f は $|z| < R$ で正則であり

$$f^{(k)}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(z), \quad k \in \{0\} \cup \mathbb{N},\ |z| < R$$

が成り立つ．したがって，特に

$$f^{(k)}(0) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(0) = \sum_{m=1}^{\infty} k! \alpha_k^{(m)}.$$

ゆえに，(5.18) で定義される級数は収束し，$f^{(k)}(0)/k! = \alpha_k$．これと f のマクローリン展開により，(5.19) が成り立つ． ∎

この定理は，2 重和 $\sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^{(m)}z^n)$ において和の順序が交換できるための十分条件を与える[8]．

5.6 一致の定理

正則関数のテイラー展開から，次の極めて重要な定理が導かれる．

【定理 5.24】(一致の定理 (theorem of identity, uniqueness theorem)) f, g を領域 D において正則な関数とする．D 内の点列 $z_n \in D$ があって，$f(z_n) = g(z_n)$, $n \in N$ かつ $\lim_{n\to\infty} z_n = a \in D$, $a \neq z_n$, $n \in \mathbb{N}$ が成り立つならば，D 上で $f = g$ である．

証明 $F(z) = f(z) - g(z)$ とすれば，F は D で正則であり，$F(z_n) = 0, n \in \mathbb{N}$. $a \in D$ であるから，a の十分小さな近傍 $U_\delta(a) = \{z \in D \mid |z-a| < \delta\}$ ($\delta > 0$ は定数) で $F(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\alpha_\ell(z-a)^\ell$ とテイラー展開できる ($\alpha_\ell = F^{(\ell)}(a)/\ell!$). しかも，これは，$\delta$ を十分小さくとれば，$U_\delta(a)$ 上で一様収束する（定理 5.18-(ii)）．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 n_0 があって，$N \geq n_0$ ならば $|F(z) - \sum_{\ell=0}^{N}\alpha_\ell(z-a)^\ell| < \varepsilon$, $z \in U_\delta(a)$. 十分大きな n に対して $z_n \in U_\delta(a)$ であり，$F(z_n) = 0$ であるから，$|\sum_{\ell=0}^{N}\alpha_\ell(z_n-a)^\ell| < \varepsilon$. そこで，$n \to \infty$ とすれば，$|\alpha_0| \leq \varepsilon$. $\varepsilon > 0$ は任意であったから，$\alpha_0 = 0$ でなければならない．したがって，$F_1(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\alpha_{\ell+1}(z-a)^\ell$ とおけば

$$F(z) = \alpha_1(z-a) + \alpha_2(z-a)^2 + \cdots = (z-a)F_1(z)$$

したがって，$F_1(z_n) = 0$. ゆえに，F の代わりに，F_1 を考え，上と同様な議論をすれば，$\alpha_1 = 0$ が得られる．以下，同様にして，$\alpha_\ell = 0$, $\ell \geq 0$ が ℓ に関する帰納法によって証明される．したがって，$F(z) = 0, z \in U_\delta(a)$. これと F の連続性により，$F(z) = 0, z \in \overline{U_\delta(a)}$.

次に，$b \neq a$ を D に属する任意の点とし，$F(b) = 0$ を証明しよう．もし，$b \in \overline{U_\delta(a)}$ ならば，これは自明であるから，$b \notin \overline{U_\delta(a)}$ の場合を考える．D の弧状連結性により，a を始点，b を終点とする曲線 $C : [t_0, t_1] \to D$ ($t_0 < t_1$) が

---

8) 2 重和 $\sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=0}^{\infty}c_{mn})$ ($c_{mn} \in \mathbb{C}$) —— このような対象を **2 重級数**とよぶ（2 重級数の厳密な定義は省略する）—— において和の順序を交換することは一般にはできない．

とれる ($C(t_0) = a, C(t_1) = b$). 前段の結果により，$T := \sup\{\tau \in [t_0, t_1) \mid F(C(t)) = 0, t \in [t_0, \tau]\}$ とすれば，$t_0 < T \leq t_1$. 仮に $T < t_1$ とし，$c = C(T)$ とおく．このとき，前段の結果を $a = c$ の場合に応用すれば，定数 $\delta_0 > 0$ があって，$\overline{U_{\delta_0}(c)} \subset D$ かつ $F(z) = 0$, $z \in \overline{U_{\delta_0}(c)}$ が成り立つ．C の連続性により，定数 $\varepsilon_0 > 0$ があって，$0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ならば，$T + \varepsilon \leq t_1$ かつ $|C(T+\varepsilon) - c| < \delta_0$ が成り立つ．すると $F(C(T+\varepsilon)) = 0, \forall\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. したがって，$F(C(t)) = 0$, $\forall t \in [t_0, T+\varepsilon_0]$. だが，これは T の定義と矛盾する．したがって，$T = t_1$ でなければならない．ゆえに $F(b) = 0$，すなわち，$f(b) = g(b)$. b は D の任意の点であったから，題意が成立する． ∎

次の事実 ── これも**一致の定理**として言及される場合がある ── は，応用上使いやすい．

【系 5.25】 f, g を領域 D において正則な関数とする. D 内に集積点をもつ集合 $A \subset D$ において $f = g$，すなわち，$f(z) = g(z), \forall z \in A$ が成り立つならば，D 上で $f = g$ である．

証明　$a \in D$ を A の集積点とすれば，$\lim_{n\to\infty} z_n = a, z_n \in A, z_n \neq a$ となる点列 z_n が存在する．仮定により，$f(z_n) = g(z_n)$，$n \in \mathbb{N}$. したがって，定理 5.24 により，題意がしたがう． ∎

【系 5.26】 D を実軸の有界閉区間 $J = [a, b]$ $(a < b)$ を含む領域とし，f, g を D において正則な関数とする. もし $f(x) = g(x), \forall x \in J$ ならば，D 上で $f = g$ である．

証明　J は D 内に集積点をもつ集合であるので，系 5.25 が適用される． ∎

一致の定理は，2 つの関数が 1 つの領域上で等しいことを示すのに威力を発揮する（以下の例を参照).

■ 例 5.7 ■　複素変数の 3 角関数に関する諸公式は，実変数の 3 角関数の諸公式を既知とすれば，一致の定理を使っても証明できる．たとえば，関数 $f(z) = \sin 2z$，$g(z) = 2\sin z \cos z$ を考えると，これらは整関数であり，$x \in \mathbb{R}$ ならば，$f(x) = g(x)$. したがって，系 5.26 により，$f(z) = g(z), z \in \mathbb{C}$. ゆえに $\sin 2z = 2\sin z \cos z$.

■ **例 5.8** ■　右半平面 ($\mathrm{Re}\, z > 0$) において

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{z^{1/2}} \tag{5.20}$$

が成り立つことを示せ．ただし，右辺の $z^{1/2}$ は主値を表す．

解　(5.20) の左辺，右辺の関数をそれぞれ $f(z), g(z)$ とおく．$x \in (0, \infty)$ ならば，第 4 章演習問題 3 によって，$f(x) = g(x)$ が成り立つ．例 4.30 によって，f は $\mathrm{Re}\, z > 0$ で正則である．また，g も $\mathrm{Re}\, z > 0$ で正則である．よって，系 5.26 によって，(5.20) が成り立つ．∎

5.7 ローラン展開

正則関数 f のテイラー展開は，f の正則点のまわりの級数展開である．だが，正則でない点のまわりにも級数展開することが可能である：

【定理 5.27】　関数 f は点 $a \in \mathbb{C}$ のまわりの円環領域 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z-a| < R_2 < \infty\}$（$R_1 \geq 0$, $R_2 > 0$ は定数）で正則であるとする．（a では正則であっても正則でなくてもどちらでもよい．）このとき，任意の $z \in D$ に対して

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \end{aligned} \tag{5.21}$$

が成り立つ．ただし

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots . \tag{5.22}$$

であり，$K(t) := a + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ ($R_1 < R < R_2$)．さらに展開 (5.21) は一意的である[9]．

証明　D 内の任意の点を z とし，$R_1 < r_1 < |z-a| < r_2 < R_2$ をみたす正数 r_1, r_2 をとり，曲線 C_j を $C_j(t) := a + r_j e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ によって定義する（図

[9] 別に $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z-a)^n$ ($d_n \in \mathbb{C}$) というふうに展開されたとすると，$d_n = c_n$, $n \in \mathbf{Z}$ が成り立つということ．

5.1 を参照)．(これは，中心を a，半径を r_j とする円を像とする単純閉曲線である．) $\delta > 0$ を十分小さくとれば，$U_\delta(z) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z-a| < r_2\}$ とできる．(すなわち，z の δ 近傍は C_1 と C_2 で囲まれた円環領域に含まれるということ．)

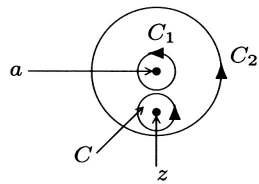


図 5.1　証明のための積分路

曲線 $C(t) = z + \delta e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ を考えると（図 5.1），コーシーの積分表示（定理 4.17）により，$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)/(\zeta - z)d\zeta$．一方，定理 4.10 を応用すれば

$$\int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \int_{C} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

したがって

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

$|\zeta - a| = r_2$ のとき，$|z - a| < |\zeta - a|$ であるから

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

であり（定理 5.22 の証明を参照），これは $\mathrm{R}(C_2)$ 上で一様収束である．したがって，項別積分定理（定理 5.15）により

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}d\zeta\right)(z-a)^n.$$

他方，定理 4.10 によって，$\int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta = \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$．したがって

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

ただし，c_n は (5.22) で定義される数である．

$|\zeta - a| = r_1$ のとき，$|\zeta - a|/|z - a| < 1$ に注意すれば

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - a}{z - a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^n}{(z-a)^{n+1}}$$

と展開できる．しかも，この収束は $\mathsf{R}(C_1)$ 上で一様である．したがって，項別積分定理により

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(\zeta)(\zeta - a)^n d\zeta \right) \frac{1}{(z-a)^{n+1}}.$$

他方，$\int_{C_1} f(\zeta)(\zeta - a)^n d\zeta = \int_K f(\zeta)(\zeta - a)^n d\zeta$．したがって

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z-a)^n}.$$

以上の結果を合わせれば，(5.21) が得られる．

展開 (5.21) の一意性を示すために

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{-n}}{(z-a)^n}, \quad R_1 < |z - a| < R_2$$

が成立したとしよう ($d_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$)．右辺は $|z - a| = R$ ($R_1 < R < R_2$) で一様収束であるから，項別積分定理により，任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta &= \sum_{m=0}^{\infty} d_m \int_K \frac{1}{(\zeta - a)^{n+1-m}} d\zeta \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} d_{-m} \int_K \frac{1}{(\zeta - a)^{n+1+m}} d\zeta \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} d_m (2\pi i) \delta_{nm} + \sum_{m=1}^{\infty} d_{-m} (2\pi i) \delta_{m(-n)} \\
&= (2\pi i) d_n.
\end{aligned}$$

したがって，$c_n = d_n, n \in \mathbb{Z}$． ∎

(5.21) を f の（点 a での）**ローラン級数** (Laurent series)，または**ローラン展開** (Laurent expansion) という[10]．この場合，c_n ($n \in \mathbb{Z}$) をその**展開係数**とよぶ．

[10] Pierre Alphonse Laurent (1813-54).

ローラン展開 (5.21) の第２項 —— $z-a$ の負の冪に関する冪級数の部分 ——

$$P_{a,f}(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \tag{5.23}$$

を**点 a における f の主要部** (principal part) という．

定理 5.27 において，f が点 a で正則ならば，コーシーの積分表示により，$c_n = f^{(n)}(a)/n!$, $n \geq 0$；$c_{-n} = 0$, $n \geq 1$ となるので，ローラン展開はテイラー展開に一致する．この意味で，ローラン展開は，テイラー展開の拡張になっている．

主要部 $P(f,a)$ の展開係数 c_{-1} は点 a における f の留数に等しいことに注意しよう：

$$c_{-1} = \mathrm{Res}\,(a,f). \tag{5.24}$$

具体的な問題ではローラン展開の係数 c_n, c_{-n} を (5.22) の積分を実行しなくても簡単に求められる場合がある (次の２つの例を参照)．

■ 例 5.9 ■　関数

$$f(z) = \frac{e^z}{z^k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

は $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ で正則であるから，この f は原点のまわりにローラン展開 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ ができる．しかし，e^z のマクローリン展開を使うと

$$\begin{aligned}
\frac{e^z}{z^k} &= \frac{1}{z^k}\left(1 + \frac{z}{1!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{z^k} + \frac{1}{z^{k-1}} + \cdots + \frac{1}{k!} + \frac{z}{(k+1)!} + \cdots + \frac{z^{n-k}}{n!} + \cdots \\
&= \sum_{n=-k}^{\infty} \frac{z^n}{(n+k)!}.
\end{aligned}$$

したがって，$c_n = 0$, $n \leq -k-1$；$c_n = 1/(n+k)!$, $n \geq -k$. 特に，$\mathrm{Res}\,(0,f) = 1/(k-1)!$.

■ 例 5.10 ■　関数

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z(z+i)(z-i)}$$

は $z = 0, \pm i$ に１位の極をもち，これらの点を除いた領域では正則である．

(i) $z=0$ におけるローラン展開．$0<|z|<1$ ならば，$|z^2|=|z|^2<1$ であるから

$$\frac{1}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z}(1-z^2+z^4-z^6+\cdots)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n z^{2n-1}.$$

ここで，$(1+z^2)^{-1}$ の幾何級数展開（例 5.3）を用いた．したがって，特に，$\mathrm{Res}\,(0,f)=1$.

(ii) $z=i$ におけるローラン展開．この場合は

$$\frac{1}{z(z+i)}=\frac{1}{i}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+i}\right)$$

と変形し

$$\frac{1}{iz}=-\frac{1}{1-(z-i)i}=-\sum_{n=0}^{\infty}i^n(z-i)^n,\quad 0<|z-i|<1,$$

$$\frac{1}{i(z+i)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{i(z-i)}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n(z-i)^n,\quad 0<|z-i|<2$$

を利用する．その結果

$$\frac{1}{z(z^2+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-1\right)i^n(z-i)^{n-1},\quad 0<|z-i|<1$$

を得る．

(iii) $z=-i$ におけるローラン展開．(ii) と同様にして（あるいは $0<|z+i|<1$ ならば $0<|(-z)-i|<1$ に注意して (ii) の結果を使う）

$$\frac{1}{z(z^2+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-1\right)(-i)^n(z+i)^{n-1},\quad 0<|z+i|<1.$$

5.8　正則関数の零点

一般に複素関数 f に対して $f(a)=0$ となる点 a があるならば，a を f の**零点**とよぶ．この節では，正則関数の零点に関わる特性をみていく．以下，**この節を通して，f は領域 D 上の正則関数であるとする**．まず，次の事実を証明する：

【命題 5.28】 f が恒等的に 0 でなければ，f の各零点 a に対して，定数 $\delta > 0$ があって，$U_\delta(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < \delta\} \subset D$ かつ $U_\delta(a) \setminus \{a\}$ の中に f は零点をもたない．

証明　仮に，どんな $\varepsilon > 0$ に対しても $U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ の中に f が零点をもつとすれば，$\varepsilon = 1/n$ $(n \in \mathbb{N})$ ごとに，$z_n \in U_{1/n}(a) \setminus \{a\}$ で $f(z_n) = 0$ をみたすものがとれる．この場合，$|z_n - a| < 1/n$ であるから，$\lim_{n\to\infty} z_n = a$．また，$z_n \neq a$．したがって，一致の定理（定理 5.24）により，$f(z) = 0, z \in D$．だが，これは仮定に反する．∎

この命題の内容は，言い換えれば，恒等的には 0 でない正則関数 f の零点のそれぞれは，f の零点からなる集合 ── f の**零点集合** ── の孤立点 (2.6.3 項を参照) であるということにほかならない．

【補題 5.29】 f は恒等的には 0 でないものとし，$a \in D$ を f の零点とする．このとき，自然数 n と正数 $\delta > 0$ で次の性質をもつものが存在する：$U_\delta(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < \delta\} \subset D$ かつ $U_\delta(a)$ 上の正則関数 g で，$g(z) \neq 0, z \in U_\delta(a)$ なるものが存在して

$$f(z) = (z-a)^n g(z), \quad z \in U_\delta(a) \tag{5.25}$$

が成り立つ．さらに，このような n と g はそれぞれ，ただ 1 つ定まる．

証明　D は開集合であるから，正数 $\delta > 0$ があって，$U_\delta(a) \subset D$．したがって，定理 5.22 と $f(a) = 0$ によって，$z \in U_\delta(a)$ に対して

$$f(z) = f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2}(z-a)^2 + \cdots \tag{5.26}$$

とテイラー展開できる．いま，f は恒等的には 0 ではないから，ある $n \in \mathbb{N}$ があって，$f^{(k)}(a) = 0, k = 1, \cdots, n-1$ かつ $f^{(n)}(a) \neq 0$ が成り立つ．したがって

$$f(z) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a)^{n+1} + \cdots.$$

そこで，右辺を $(z-a)^n$ でくくれば，$f(z) = (z-a)^n g(z)$ と書ける．ただし

$$g(z) := \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a) + \cdots = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{f^{(n+\ell)}(a)}{(n+\ell)!}(z-a)^\ell.$$

この級数の収束半径は，(5.26) の右辺の級数の収束半径と同じであるから（定理 5.19-(i) の応用），g は $U_\delta(a)$ 上で正則である．明らかに $g(a) = f^{(n)}(a)/n! \neq 0$. g は連続であるから，a の十分小さな近傍で 0 にはならない（命題 2.39 を参照）．したがって，必要ならば，δ を十分小さく取り直すことにより，$g(z) \neq 0, z \in U_\delta(a)$ とできる．ゆえに，命題の前半の主張が証明される．

(5.25) における n の一意性を示すために，別に $m \in \mathbb{N}$ があって，a のある近傍 U で $f(z) = (z-a)^m h(z)$ が成り立つとしよう．ただし，h は U で正則かつ $h(z) \neq 0, z \in U$ をみたすとする．したがって，任意の $z \in U \cap U_\delta(a)$ に対して，$(z-a)^m h(z) = (z-a)^n g(z)$. $m > n$ とすれば，$(z-a)^{m-n} h(z) = g(z), z \in U \cap U_\delta(a), z \neq a$. そこで，$z \to a$ とすれば，両辺の連続性により，$0 = g(a)$. だが，これは矛盾である．同様に，$n > m$ の場合は，$h(a) = 0$ が出るので，やはり矛盾である．したがって，$m = n$. これと $g(z) = f(z)/(z-a)^n, z \neq a$ により，g の一意性も導かれる． ∎

補題 5.29 における自然数 n を f の零点 a の**位数** (order) とよぶ．この場合，点 a を f の **n 位の零点**という．特に，位数が 1 の零点を**単純零点** (simple zero) という．

■ **例 5.11** ■ $c > 0$ を定数とする．関数 $z^2 + c^2$ の零点は $\pm ic$ であり，いずれも単純零点である．

証明 $z^2 + c^2 = (z+ic)(z-ic)$ と因数分解すればよい． ∎

■ **例 5.12** ■ $\sin z$ ($z \in \mathbb{C}$) の零点は $n\pi, n \in \mathbb{Z}$ であり，いずれも単純零点である．

証明 $\sin(n\pi) = 0$ は周知である．$\sin z$ のテイラー展開

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

より

$$\sin z = zS(z), \quad z \in \mathbb{C} \quad \cdots (*)$$

と書ける．ただし

$$S(z) := 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

S は整関数であり，$S(0) = 1 \neq 0$．したがって，$z = 0$ は $\sin z$ の単純零点である．また，$(*)$ により

$$\sin(z - n\pi) = (z - n\pi)S(z - n\pi).$$

これと公式 $\sin(z - n\pi) = (-1)^n \sin z$（加法定理；(1.72) を参照）を用いると

$$\sin z = (z - n\pi)\widehat{S}(z).$$

ただし，$\widehat{S}(z) := (-1)^n S(z - n\pi)$．$\widehat{S}$ も整関数であり，$\widehat{S}(n\pi) = (-1)^n \neq 0$ であるから，$z = n\pi$ は $\sin z$ の単純零点である． ▮

■ **例 5.13** ■　$\cos z$ $(z \in \mathbb{C})$ の零点は $(n + 1/2)\pi, n \in \mathbb{Z}$ であり，いずれも単純零点である（演習問題 11）．

■ **例 5.14** ■　$\beta > 0$ とする．関数 $f(z) = e^{\beta z} - 1,\ z \in \mathbb{C}$ の零点とその位数を求めよ．

解　この例の f は整関数であり

$$f(z) = \beta z + \frac{\beta^2 z^2}{2!} + \frac{\beta^3 z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

というテイラー展開をもつ．したがって

$$f(z) = \beta z g(z).$$

ただし，$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{n-1} z^{n-1}/n!$．一方，$f(z) = 0$ と $e^{\beta z} = 1$ は同値であり，これをみたす z は $z = 2\pi n i/\beta, n \in \mathbb{Z}$ でつくされる．したがって，f の零点の集合は $\{2\pi n i/\beta \mid n \in \mathbb{Z}\}$ である．上の式から，$f(z - 2\pi n i/\beta) = \beta(z - 2\pi n i/\beta)g(z - 2\pi n i/\beta)$．一方，$f(z - 2\pi n i/\beta) = f(z)$．したがって，$f(z) = (z - 2\pi n i/\beta)\beta g(z - 2\pi n i/\beta)$．$g(0) = 1 \neq 0$ であるから，$z = 2\pi n i/\beta$ は，f の単純零点である． ▮

零点と極の関係が次の定理で与えられる．

【定理 5.30】　f は $|z - z_0| < R$ で正則であるとする．関数 f が z_0 で n 位の零点をもつことと関数 $1/f(z)$ が z_0 で n 位の極をもつことは同値である．

証明　関数 f が z_0 で n 位の零点をもつとする．このとき，補題 5.29 によって，ある正数 $\delta \in (0, R)$ と $|z - z_0| < \delta$ で正則な関数 g $(g(z) \neq 0)$ があって，

$f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ と書ける．このとき，$h(z) := 1/g(z)$ は $|z - z_0| < \delta$ で正則であり，$1/f(z) = h(z)/(z - z_0)^n$, $0 < |z - z_0| < \delta$ が成り立つ．$h(z_0) \neq 0$ であるから，これは，z_0 が f の n 位の極であることを意味する．

逆に, 関数 $1/f(z)$ が z_0 で n 位の極をもつとする．このとき, ある正数 $\delta \in (0, R)$ と $|z - z_0| < \delta$ で正則な関数 h_1 $(h_1(z) \neq 0)$ があって，$1/f(z) = h_1(z)/(z - z_0)^n$ と書ける．このとき，$g_1(z) := 1/h_1(z)$ は $|z - z_0| < \delta$ で正則であり，$f(z) = (z - z_0)^n g_1(z)$, $0 < |z - z_0| < \delta$ が成り立つ．$g_1(z) \neq 0$ であるから，これは，z_0 が f の n 位の零点であることを意味する． ∎

5.9 零点の個数

恒等的に零でない正則関数 f の零点の個数がどのくらいあるかを調べるのは理論上も応用上も重要な問題となる．領域 D に含まれる領域 $\Omega \subset D$ 内にある f の**零点の個数**を

$$N_f(\Omega) := \Omega \text{ 内にある，} f \text{ の零点の位数の和} \tag{5.27}$$

によって定義する．なお，f が Ω 内に零点をもたない場合には，$N_f(\Omega) := 0$ と定義する．

この定義によれば，Ω 内にある，f の相異なる零点が k 個であり，それぞれの位数が $n_1, \cdots, n_k$ であるとき

$$N_f(\Omega) = \sum_{j=1}^{k} n_j \tag{5.28}$$

となる．

Ω の閉包 $\bar{\Omega}$ が有界で D に含まれるならば，一致の定理（定理 5.24）を応用することにより，$N_f(\Omega)$ は有限であることがわかる[11]．

曲線 C に対して，その像 R(C) の中に f が零点をもたないとき，「f は C 上に零点をもたない」あるいは「C 上には f の零点はない」という言い方をする．

次の定理は，正則関数の零点の個数に関する基本的な定理のひとつである：

---

[11] 仮に，f が可算無限個の零点 $z_n \in \Omega, n \in \mathbb{N}$ をもつとすれば，Ω の有界性により，数列 $\{z_n\}_n$ は有界である．したがって，ボルツァーノ–ヴァイエルシュトラースの定理（定理 2.12）により，収束する部分列 z_{n_k} がとれる．この場合，$\lim_{k\to\infty} z_{n_k} \in \bar{\Omega} \subset D$ であるから，一致の定理により，$f(z) = 0, z \in D$．だが，これは矛盾である．

【定理 5.31】 C を D 内の区分的に連続微分可能な単純閉曲線（向きは正）でその内部 $C_{\rm int}$ は D に含まれるとする．C 上には f の零点はないものとする．このとき

$$N_f(C_{\rm int}) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz. \tag{5.29}$$

証明　$C_{\rm int}$ 内にある f の零点を $a_1, \cdots, a_k$ とし，a_j の位数は n_j であるとする $(a_j \neq a_\ell, j \neq \ell)$．正数 δ を，$\overline{U_\delta(a_j)} \cap \overline{U_\delta(a_\ell)} = \emptyset$ $(j \neq \ell)$ かつ $U_\delta(a_j) \subset C_{\rm int}$ $(j = 1, \cdots, k)$ となるように十分小さくとる．したがって，$C_j(t) = a_j + \delta e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ とすれば，$C_{\rm int} \cap (\bigcap_{j=1}^k (C_j)_{\rm ext})$ においては，$f'(z)/f(z)$ は正則であるから，定理 4.10 によって

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^k \int_{C_j} \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

そこで，積分 $\int_{C_j} f'(z)/f(z)dz$ について考える．必要ならば，δ をさらに十分小さくとることにより，$f(z) = (z - a_j)^{n_j} g_j(z)$, $|z - a_j| \leq \delta$ として一般性を失わない．ただし，g_j は $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_j| \leq \delta\}$ を含む領域で正則な関数であり，かつ $g_j(z) \neq 0, |z - a_j| \leq \delta$ をみたすものである．すると

$$f'(z) = n_j(z - a_j)^{n_j - 1} g_j(z) + (z - a_j)^{n_j} g_j'(z)$$

であるから，$f'(z)/f(z) = n_j/(z - a_j) + g'(z)/g(z)$. したがって，

$$\int_{C_j} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = n_j \int_{C_j} \frac{1}{z - a_j}dz + \int_{C_j} \frac{g'(z)}{g(z)}dz.$$

右辺第 1 項は $2\pi i n_j$ に等しい．$g'(z)/g(z)$ は $(C_j)_{\rm int}$ で正則であるので，右辺の第 2 項は 0 に等しい．ゆえに

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k n_j = 2\pi i N_f(C_{\rm int}).$$

よって，(5.29) が得られる．　■

式 (5.29) の幾何学的意味を考えてみよう．そのために，結果を見越して，ある概念を導入する．$C : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ を区分的に連続微分可能な閉曲線（単純曲線である必要はない）とするとき，任意の $a \notin \mathsf{R}(C)$ に対して

$$n(C, a) := \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z - a}dz \tag{5.30}$$

という量を定義する．これについて，次の事実が見出される：

【補題 5.32】 (i) $n(C,a)$ は整数である．

(ii) $a \in C_{\mathrm{ext}}$（C の外部）ならば，$n(C,a)=0$．

証明 (i) $K(t)=C(t)-a$ とすれば

$$n(C,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{t_0}^{t_1} K(t)^{-1}K'(t)dt.$$

そこで, $F(t) := \int_{t_0}^{t} K(s)^{-1}K'(s)ds$, $t_0 \le t \le t_1$ とおけば, $n(C,a)=F(t_1)/(2\pi i)$. 一方, F は微分可能であり, $F'(t)=K(t)^{-1}K'(t)$. したがって, $H(t)=e^{-F(t)}K(t)$ とおけば, $H'(t)=0$. ゆえに, $H(t)=c$ (c は複素定数). これは $e^{-F(t_1)}K(t_1)=K(t_0)$ を意味する ($F(t_0)=0$ に注意). $K(t_0)=K(t_1)$ であるから, $e^{-F(t_1)}=1$. ゆえに, $F(t_1)=2\pi i m$ となる整数 m がある. よって, $n(C,a)=m$ であるので, $n(C,a)$ は整数である.

(ii) $a \in C_{\mathrm{ext}}$ としよう．このとき，$1/(z-a)$ は，$C_{\mathrm{int}} \cup \mathsf{R}(C)$ を含む，ある単連結領域で正則である．したがって，系 4.14 によって，$\int_C (z-a)^{-1}dz=0$．ゆえに，$n(C,a)=0$． ∎

たとえば，$C_\ell^{\pm}(t)=a+re^{\pm it}$（複号同順），$t \in [0,2\ell\pi]$ ($r>0$, $\ell \in \mathbb{N}$) ならば，$n(C_\ell^{\pm},a)=\pm\ell$．したがって，この場合，$n(C_\ell^{\pm},a)$ は曲線 $C_\ell^{\pm}$ が点 a のまわりを回る回数に等しい．(正であれば，反時計回りに回る回数；負であれば，その絶対値は時計回りに回る回数.)

一般に，$n(C,a)$ を曲線 C の a のまわりの**回転数**または**巻きつき数** (winding number) とよぶ.

さて，$C:[t_0,t_1]\to D$ を区分的に連続微分可能な単純閉曲線としよう ($C(t_0)=C(t_1)$)．f は $\mathsf{R}(C)$ を含む領域で正則であるとする．このとき，合成写像 $C_f := f\circ C$ ($C_f(t) := f(C(t))$, $t\in[t_0,t_1]$) は区分的に連続微分可能な閉曲線であり

$$C_f'(t)=C'(t)f'(C(t)).$$

これから

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_f}\frac{1}{z}dz=n(C_f,0) \tag{5.31}$$

がわかる．ゆえに，定理 5.31 の条件をみたす f に対して

$$N_f(C_{\mathrm{int}}) = n(C_f, 0). \tag{5.32}$$

こうして，**C の内部にある，f の零点の個数は，曲線 C_f の原点のまわりの回転数に等しい**ことが結論される．これは実に興味深い照応といえよう．

ここで，回転数と関連する対象を導入しておこう．$C : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ を曲線とし，f を $\mathsf{R}(C)$ を含む領域で正則な関数とする．さらに，f は C 上に零点をもたないとする．このとき，**曲線 C に沿う f の偏角の増分**を

$$\delta_C(\arg f) := \arg f(C(t_1)) - \arg f(C(t_0))$$

によって定義する．ただし，C が閉曲線のときは，右辺第 1 項は

$$\arg f(C(t_1)) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \arg f(C(t_1 - \varepsilon))$$

と定義する．

【命題 5.33】　C は区分的に連続微分可能な単純閉曲線であるとし，f を上述のものとする．このとき，$\delta_C(\arg f)$ は 2π の整数倍であり

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = i\delta_C(\arg f)$$

が成り立つ．

証明　仮定により，$\mathsf{R}(C)$ 上の各点 ζ に対して，定数 $\delta(\zeta) > 0$ があって，$U_\zeta := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \zeta| < \delta(\zeta)\}$ において，f は正則であり，零点をもたない．$\mathsf{R}(C) \subset \bigcup_{\zeta \in \mathsf{R}(C)} U_\zeta$ であり，$\mathsf{R}(C)$ はコンパクト集合（命題 2.24 と定理 2.22 による）であるから，有限個の点 $\zeta_1, \cdots, \zeta_n$ があって，$\mathsf{R}(C) \subset \bigcup_{j=1}^n U_{\zeta_j}$ が成り立つ．必要ならば，番号を付け替えることにより，$U_{\zeta_j} \cap U_{\zeta_{j+1}} \neq \emptyset$, $j = 1, \cdots, n$ として一般性を失わない．ただし，$\zeta_{n+1} := \zeta_1$ とする．このとき，$\mathsf{R}(C)$ に属する点列 $a_1, \cdots, a_n (a_j \neq a_k,\ j \neq k)$, $a_{n+1} := a_1$ で $a_j, a_{j+1} \in U_{\zeta_j}$ $(j = 1, \cdots, n)$ をみたすものがとれる．必要ならば，曲線 C のパラメータを変換することにより，$a_1 = C(t_0) = C(t_1) (C : [t_0, t_1] \to \mathbb{C})$ としてよい．U_{ζ_1} において，f は正則で $f(z) \neq 0$ であるから，$\log f(a_1)$ として，$0 \leq \arg f(a_1) < 2\pi$ となる分枝をとれば，$\log f(z) = \log |f(z)| + i \arg f(z)$ は U_{ζ_1} で 1 価正則である．

次に, U_{ζ_2} において, $\log f(z)$ の分枝を, $z=a_2$ において, U_{ζ_1} における $\log f(z)$ から定まる値をとるように選ぶ. 同様の仕方で, 順次, 各 U_{ζ_j} における $\log f(z)$ の分枝を定める. このとき, 各 U_{ζ_j} において, $\log f(z)$ は1価正則であり, $d\log f(z)/dz = f'(z)/f(z)$. しかも, 各 U_{ζ_j} は単連結であるから, 定理 4.13 によって,

$$\int_{a_j}^{a_{j+1}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \log f(a_{j+1}) - \log f(a_j).$$

そこで, j について, 1 から n まで加えれば

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \log f(a_{n+1}) - \log f(a_1)$$

を得るが, $\log f(z)$ に関する上の定め方により, 右辺は, $2\pi i$ の整数倍であり, $\int_C f'(z)/f(z)dz = i\delta_C(\arg f)$ が得られる. したがって, $\delta_C(\arg f)$ は 2π の整数倍である. ∎

命題 5.33, (5.31) および (5.32) から, 次の事実が導かれる.

【命題 5.34】 C は区分的に連続微分可能な単純閉曲線であるとし, f は $C_{\rm int}\cup \mathrm{R}(C)$ を含む領域で正則な関数であるとする. さらに, f は C 上に零点をもたないとする. このとき

$$N_f(C_{\rm int}) = n(C_f, 0) = \frac{1}{2\pi}\delta_C(\arg f).$$

正則関数の零点との関連において, 応用上重要な問題として次のものが基本的である:

> **関数 f の零点の個数がわかっているとき, 別の関数 g を f に加えた場合 —— このような操作を f の (g による) 摂動** (perturbation) **とよぶ ——, 関数 $f+g$ の零点の個数はどうなるか?**

直観的にいって, g が f に対して何らかの意味で "十分小さい" ならば, f に対して, g によって摂動を行っても, 零点の個数は不変に保たれると予想される. この予想を正確に述べたのが次の定理である.

【定理 5.35】(ルーシェの定理[12])　C を区分的に連続微分可能な単純閉曲線とし，C の内部を C_{int} とする．関数 f,g は $\mathsf{R}(C) \cup C_{\mathrm{int}}$ を含む領域において正則で，$\mathsf{R}(C)$ 上で不等式

$$|g(z)| < |f(z)|, \quad z \in \mathsf{R}(C)$$

をみたすとする．このとき，C_{int} に含まれる，f と $f+g$ の零点の個数は等しい．すなわち

$$N_f(C_{\mathrm{int}}) = N_{f+g}(C_{\mathrm{int}}). \tag{5.33}$$

証明　$\mathsf{R}(C)$ 上で $f(z) + g(z) = f(z)h(z)$ と書ける．ただし，$h(z) := 1 + g(z)/f(z)$．したがって

$$\delta_C(\arg(f+g)) = \delta_C(\arg f) + \delta_C(\arg h).$$

仮定により，$\mathsf{R}(C)$ 上で $|h(z) - 1| < 1$．これは，$0 \in (C_h)_{\mathrm{ext}}$ を意味する．したがって，補題 5.32-(ii) によって，$n(C_h, 0) = 0$．これと命題 5.34 によって，$\delta_C(\arg h) = 0$．ゆえに，$\delta_C(\arg(f+g)) = \delta_C(\arg f)$．そこで，再び命題 5.34 を使えば，求める結果が得られる．　∎

ルーシェの定理の応用として，次の定理を得る．

【定理 5.36】(フルヴィッツの定理[13])　領域 D で正則な関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が D 上で f に広義一様収束しているとする．C を D 内の区分的に連続微分可能な単純閉曲線とし，C の内部 C_{int} は D に含まれているとする．関数 f は C 上には零点をもたないとする．このとき，ある番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ ならば，C_{int} における f_n の零点の個数は C_{int} における f の零点の個数に等しい：

$$N_{f_n}(C_{\mathrm{int}}) = N_f(C_{\mathrm{int}}), \quad n \geq n_0. \tag{5.34}$$

証明　$f(z)$ は C 上で零点をもたないから，定数 $c > 0$ があって，$|f(z)| \geq c, z \in \mathsf{R}(C)$．さて，$f_n(z) = f(z) + g_n(z)$, $g_n(z) := f_n(z) - f(z)$ と書ける．$\overline{C_{\mathrm{int}}}$ は有界閉集合であるから，仮定により，番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ ならば，$|g_n(z)| < c, z \in \overline{C_{\mathrm{int}}}$．したがって，$C$ 上で，$|g_n(z)| < |f(z)|$ $(n \geq n_0)$．ゆえに，ルーシェの定理により，(5.34) が成立する．　∎

---

[12] Eugene Rouché (1832–1910).
[13] Adolf Hurwitz (1859–1919). ドイツの数学者.

5.10 正則関数の写像特性

ルーシェの定理の応用のひとつとして，正則関数の基本的な写像特性を解明することができる．

まず，零点の概念の一般化を導入しておく．f を複素平面 $\mathbb{C}$ の部分集合 D を定義域とする複素関数とする．複素数 $c \in \mathbb{C}$ に対して，$f(z) = c$ をみたす点 $z \in D$ を f の **c 点**とよぶ．もちろん，そのような z がない場合には，f は c 点をもたないという．

明らかに，$z_c \in D$ が f の c 点であることと z_c が関数 $f(z) - c$ の零点であることは同値である．そこで，$f(z) - c$ の零点としての z_c の位数が n であるとき，c 点 z_c の位数は n であるという．位数が 1 の c 点を**単純 c 点**とよぶ．

零点の場合と同様，n 位の c 点は，個数的には，n 個の c 点と考える．

次の定理は c 点の存在に関する基本定理のひとつである：

【定理 5.37】 f を領域 D で恒等的に 0 でない正則な関数とし，$z = a \in D$ で n 位の零点をもつとする．このとき，正数 r, ρ が存在して，各 $c \in U_\rho(0) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < \rho\}$ に対して，$U_r(a) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-a| < r\}$ における f の c 点の個数は n に等しい．

証明 $\phi(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f^{(k)}(a)(z-a)^k/k!$ とおく．仮定により，f の点 a におけるテイラー展開は，$f(z) = c_n(z-a)^n + \phi(z)$ という形に書ける $(c_n = f^{(n)}(a)/n! \neq 0)$．$\phi(z)$ の定義から，$\lim_{z\to a} \phi(z)/[c_n(z-a)^n] = 0$ がしたがう．したがって，十分小さい $r > 0$ をとれば，$0 < |z-a| \leq r$ において，$|\phi(z)/[c_n(z-a)^n]| < 1$ とできる．特に，$|z-a| = r$ のとき，$|c_n(z-a)^n| - |\phi(z)| > 0$．左辺の関数は，有界閉集合である円周 $|z-a| = r$ 上で連続であるから，正の最小値をもつ．これを ρ とすれば，$|c_n(z-a)^n| \geq |\phi(z)| + \rho$, $|z-a| = r$．いま，$c \in U_\rho(0)$ を任意にとる．このとき，$f(z) - c = c_n(z-a)^n + (\phi(z) - c)$．$|z-a| = r$ 上では

$$|c_n(z-a)^n| \geq |\phi(z)| + \rho > |\phi(z)| + |c| \geq |\phi(z) - c|.$$

したがって，ルーシェの定理により，$|z-a| < r$ における，$f(z) - c$ の零点の個数 —— これは f の c 点の個数 —— と $c_n(z-a)^n$ の零点の個数は等しい．他方，後者は n である．ゆえに題意が成立する． ∎

定理 5.37 は次のように一般化される：

【定理 5.38】 f を領域 D で定数でない正則な関数とし，$z = a \in D$ で n 位の c_0 点をもつとする．このとき，正数 r, ρ が存在して，各 $c \in U_\rho(c_0)$ に対して，$U_r(a)$ の中における f の c 点の個数は n に等しい．

証明　$g(z) = f(z) - c_0$ とおくと，g は $z = a$ で n 位の零点をもつ．したがって，定理 5.37 により，正数 r, ρ が存在して，各 $c_1 \in U_\rho(0)$ に対して，$U_r(a)$ における g の c_1 点の個数は n に等しい．したがって，$U_r(a)$ における f の $(c_0 + c_1)$ 点の個数は n に等しい．他方，$|(c_0+c_1)-c_0| = |c_1| < \rho$ であるから，$c_0+c_1 \in U_\rho(c_0)$．任意の $c \in U_\rho(c_0)$ に対して，$c_1 = c - c_0$ とおけば，$|c_1| < \rho$，すなわち，$c_1 \in U_\rho(0)$．ゆえに，各 $c \in U_\rho(c_0)$ に対して，$U_r(a)$ における f の c 点の個数は n に等しい．

∎

一般に，$\mathbb{C}$ の開集合 O を定義域とする複素関数 f が，O の中の任意の開集合 Ω を $\mathbb{C}$ の開集合に写すとき（すなわち，$f(\Omega) = \{f(z) \mid z \in \Omega\}$ も開集合），f は**開写像**とよばれる．

開写像については，次の事実が基本的である：

【補題 5.39】 単射な開写像 f の逆写像 f^{-1} は連続である．

証明　O を $\mathbb{C}$ の開集合とし，$f : O \to \mathbb{C}$ を単射な開写像とする．$V := f(O)$ とおけば，仮定により，V は開集合である．$w_0 \in V$ を任意にとる．このとき，$f(z_0) = w_0$ となる $z_0 \in O$ がただ 1 つ存在する．したがって，$z_0 = f^{-1}(w_0)$．十分小さい任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$U_\varepsilon(z_0)$ は O に含まれる開集合であるから，仮定により，$f(U_\varepsilon(z_0))$ は V の開集合である．したがって，ある $\delta > 0$ があって，$|w - w_0| < \delta$ ならば $w \in f(U_\varepsilon(z_0))$．すなわち，$|f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)| < \varepsilon$．これは，$f^{-1}$ が w_0 で連続であることを示す．$w_0 \in V$ は任意であったから，f^{-1} は V 上で連続である．∎

次の定理は，領域で定義された定数でない正則関数の基本的性質のひとつを語る：

【定理 5.40】 領域で定義された定数でない正則関数は開写像である．

証明 f は領域 $D \subset \mathbb{C}$ を定義域とする，定数でない正則関数とし，$\Omega \subset D$ を D に含まれる任意の開集合とする．$c_0 \in f(\Omega)$ を任意にとる．したがって，$f(a) = c_0$ となる $a \in \Omega$ がある．これは a が f の c_0 点であることを意味する．この c_0 点の位数を n とする．このとき，定理 5.38 によって，正数 r, ρ が存在して，各 $c \in U_\rho(c_0)$ に対して，$U_r(a) \subset \Omega$ の中における f の c 点の個数は n に等しい．したがって，$|c - c_0| < \rho$ ならば $c = f(z_c)$ となる z_c が $U_r(a)$ の中にある．ゆえに $c \in f(\Omega)$．つまり，$f(\Omega)$ は c_0 の ρ 近傍を含む．よって，$f(\Omega)$ は開集合である． ∎

以上の準備のもとで，定理 5.38 の応用として，次の重要な定理を証明することができる：

【定理 5.41】（正則関数に関する逆関数定理） f は $z = a$ を含む近傍 U で正則であり，$f'(a) \neq 0$ であるとする．このとき，a のある δ 近傍 $U_\delta(a) \subset U$ $(\delta > 0)$ が存在して，f は $U_\delta(a)$ 上では単射であり，その逆写像 f^{-1} は正則である．さらに

$$\frac{d}{dw} f^{-1}(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}, \quad w \in f(U_\delta(a)) \tag{5.35}$$

が成り立つ．

証明 $c_0 = f(a)$ とおく．f は U で正則であるから

$$f(z) = c_0 + (z-a)(f'(a) + \psi(z)), \quad \psi(z) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-1}, \quad z \in U$$

と展開できる．$\psi(a) = 0$ である．ψ は U で正則であるので，もちろん，連続である．したがって，任意の $0 < \varepsilon < |f'(a)|$（いま，仮定により，$|f'(a)| > 0$ に注意）に対して，$r_1 > 0$ があって，$|z - a| < r_1$ ならば，$|\psi(z)| < \varepsilon$．これは，$U_{r_1}(a)$ の中にある f の c_0 点が $z = a$ だけであることを意味する．（$\because$ もし，$f(z_1) = c_0$ となる $z_1 \neq a$ で $|z_1 - a| < r_1$ をみたすものがあったとすれば，$f'(a) = -\psi(z_1)$．したがって，$|f'(a)| = |\psi(z_1)| < |f'(a)|$ となって矛盾．）ゆえに，定理 5.38 によって，正数 r, ρ があって，$U_r(a) \subset U_{r_1}(a)$ かつ各 $c \in U_\rho(c_0)$ に対して，f の c 点は $U_r(a)$ の中にただ 1 つしかない．

f の連続性により，$0 < \delta < r$ を十分小さくとれば，$W := f(U_\delta(a)) \subset U_\rho(c_0)$ とできる．$U_\delta(a) \subset U_r(a)$ であるから，前段の結果により，$f : U_\delta(a) \to W$ は全単射である．したがって，定理 5.40 と補題 5.39 によって，W は開集合であり，

$f^{-1}: W \to \mathbb{C}$ は連続である．ゆえに，任意の $w \in W$ と $h \in \mathbb{C}$ （$|h|$ は十分小）に対して，$k_h := f^{-1}(w+h) - f^{-1}(w)$ とおくと，$\lim_{h\to 0} k_h = 0$ が成り立つ．そこで，$z = f^{-1}(w)$ とおけば，$h = f(z+k_h) - f(z)$．したがって

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(w+h) - f^{-1}(w)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{[f(z+k_h) - f(z)]/k_h} = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}.$$

ゆえに題意が証明される．∎

5.11　単葉関数

この節では，単射である正則関数の基本的な性質を調べておく．実は，複素解析では，単射な正則関数にある名前がつけられている：$\mathbb{C}$ の領域 D で定義された正則関数 f が単射であるとき，すなわち，D に属する相異なる任意の点 z_1, z_2 $(z_1 \neq z_2)$ に対して，$f(z_1) \neq f(z_2)$ が成り立つとき，f は ***D* で単葉** (univalent, simple) であるという．

定理 5.41 で見たように，ある点 $a \in \mathbb{C}$ の近傍で定義された正則関数 f が $f'(a) \neq 0$ をみたせば，f は a の適当な近傍で単葉である．次の定理は，この逆が大局的に ── つまり，f の定義域全体にわたって ── 成り立つことを語るものである．

【定理 5.42】　正則関数 f が領域 D で単葉ならば，任意の $z \in D$ に対して，$f'(z) \neq 0$.

証明　背理法による．そこで，ある $z_0 \in D$ があって，$f'(z_0) = 0$ としよう．したがって，ある $\rho > 0$ があって，$|z - z_0| < \rho$ ならば $z \in D$ であり

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

と整級数展開される．ただし，$c_0 := f(z_0), c_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ であり，$k \geq 2$ は自然数で $c_k \neq 0$. そこで，$g(z) = c_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n-k}$ とおけば，$f(z) - c_0 = (z - z_0)^k g(z)$ と書ける．$g(z_0) = c_k \neq 0$ であるから，ある $\delta \in (0, \rho)$

があって，$g_0 := \inf_{|z-z_0|\le\delta} |g(z)| > 0$．したがって，$|z-z_0| = \delta$ ならば，$|f(z)-c_0| \ge g_0\delta^k > 0$．ゆえに，$C_\delta(t) = z_0 + \delta e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ とすれば

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\delta} \frac{f'(z)}{f(z)-c_0}dz = k.$$

これは，定理 5.31 により，$|z-z_0| < \delta$ において，$f(z)-c_0$ の零点が k 個あることを示す．$f_0 := \inf_{|z-z_0|=\delta} |f(z)-c_0|$ とし，$|c-c_0| < f_0$ となる $c \in \mathbb{C}, c \ne c_0$ を任意にとる．このとき，明らかに，$|z-z_0| = \delta$ ならば，$|c-c_0| < |f(z)-c_0|$．したがって，ルーシェの定理 (定理 5.35) により，$f(z)-c = (f(z)-c_0)+(c_0-c)$ の，$|z-z_0| < \delta$ における零点の個数は k に等しい．必要ならば，δ を十分小さく取り直すことにより，$0 < |z-z_0| < \delta$ には，$f'(z)$ の零点は存在しないとして一般性を失わない．すると，$|z-z_0| < \delta$ にある $f(z)-c$ の零点の位数はすべて 1 である．これは，$|z-z_0| < \delta$ の中に，互いに異なる k 個の点 $z_1, \cdots, z_k$ があって，$f(z_j) = c$, $j = 1, \cdots, k$ が成り立つことを意味する．だが，これは f が単射であることに反する． ∎

【定理 5.43】 $\{f_n(z)\}_n$ を領域 D で定義された単葉関数の列とし，D 上で，関数 $f(z)$ に広義一様収束するとする．ただし，f は恒等的に定数でないとする．このとき，f は D で単葉である．

証明 f の正則性は定理 5.16 による．仮に f が単葉でないとして矛盾を導こう．f が単葉でないならば，$a := f(z_1) = f(z_2)$ となる $z_1, z_2 \in D, z_1 \ne z_2$ がある．$\delta > 0$ を十分小さくとれば，$U_\delta(z_1) \subset D, U_\delta(z_2) \subset D$ かつ $U_\delta(z_1) \cap U_\delta(z_2) = \emptyset \cdots (*)$ とできる．フルヴィッツの定理 (定理 5.36) によって，ある番号 n_0 があって，$n \ge n_0$ ならば，$f_n(z)-a$ は，$U_\delta(z_1), U_\delta(z_2)$ の中にそれぞれ，少なくとも 1 個の零点をもつ．それらをそれぞれ $z_1^{(n)}, z_2^{(n)}$ とする．したがって，$f_n(z_1^{(n)}) = f_n(z_2^{(n)})$．だが，$(*)$ によって，$z_1^{(n)} \ne z_2^{(n)}$．これは，f_n の単葉性に反する． ∎

5.12 等 角 写 像

この節では，単葉な正則関数が有する顕著な写像特性のひとつを取り上げる．まず，準備として，曲線と複素関数の合成写像についての基本的性質を調べる．

5.12.1 曲線と複素関数の合成

D は $\mathbb{C}$ の領域であるとする．$C:[a,b]\to\mathbb{C}$ を曲線とし，その像を $\mathsf{R}(C)$ と記す．いま，$\mathsf{R}(C)\subset D$ とする．このとき，D 上の複素関数 f に対して，合成写像

$$C_f = f\circ C, \quad C_f(t) = f(C(t)), \quad t\in[a,b] \tag{5.36}$$

が定義される．

【命題 5.44】 f が D 上で連続ならば，C_f は曲線である．

証明 C_f の連続性を示せばよいが，これは，定理 2.37-(iv) の証明と同様の仕方でなされる． ∎

連続微分可能な曲線のうちで，より強い性質をもつものを導入する．連続微分可能な単純曲線 $C:[a,b]\to\mathbb{C}$ が $C'(t)\neq 0, t\in[a,b]$ をみたすとき，曲線 C は**正則**であるという．

【命題 5.45】 $C:[a,b]\to D$ は連続微分可能な曲線とし，$f:D\to\mathbb{C}$ は C^1 級の関数[14)]であると仮定する．

(i) C_f は連続微分可能な曲線であり

$$C'_f(t) = f_x(C(t))\mathrm{Re}\,C'(t) + f_y(C(t))\mathrm{Im}\,C'(t), \quad t\in[a,b] \tag{5.37}$$

が成り立つ．

(ii) f が単射であり，C が正則曲線で $\mathrm{Im}\,[f_x(C(t))^* f_y(C(t))]\neq 0$, $t\in[a,b]$ をみたすならば，C_f は正則曲線である．

証明 (i) 微分可能性と式 (5.37) の証明は，定理 3.2-(iv) の証明と同様．C'_f の連続性は C, C', f_x, f_y の連続性から導かれる．

(ii) $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ $(u(x,y)=\mathrm{Re}\,f(z),\ v(x,y)=\mathrm{Im}\,f(z),\ z = x+iy)$ とおくと，条件の式は，$\mathsf{R}(C(t))$ 上で $u_xv_y - u_yv_x\neq 0$ と同値．これと $C'(t)\neq 0, t\in[a,b]$ によって，各 $t\in[a,b]$ に対して，$f_x(C(t))\mathrm{Re}\,C'(t) +$

14) 4.2 節を参照．

$f_y(C(t))\mathrm{Im}\, C'(t) \neq 0, t \in [a,b]$ がしたがう（左辺 $=0$ とすると，$C'(t)=0$ が導かれる）．ゆえに，(i) により，$C'_f(t) \neq 0, t \in [a,b]$．$C_f$ の単純性は，f の単射性と C の単純性からしたがう．　∎

! 注意 5.3　上の命題で，もし，f が正則関数ならば，(5.37) は

$$C'_f(t) = C'(t) f'(C(t)) \tag{5.38}$$

という形をとる．また，(ii) の 2 番目の条件は

$$f'(C(t)) \neq 0, \quad t \in [a,b] \tag{5.39}$$

と同値である（コーシー–リーマンの方程式による）．

5.12.2　2 つの正則曲線の交角と正則関数の等角性

$C : [a,b] \to \mathbb{C}$ が正則曲線であるとき，C 上の点 $C(t)$ $(t \in [a,b])$ に対して実数 $\mathrm{Arg}\, C'(t)$ がただ 1 つ定まる．これは，幾何学的には，点 $C(t)$ における C の接線（向きはベクトル $C'(t)$ の向き）が実軸となす角度を表す（図 5.2）．

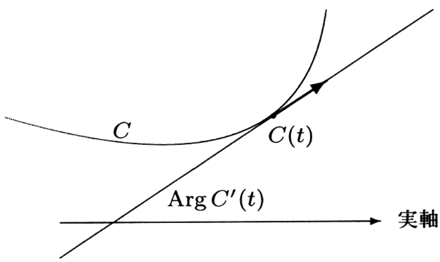


図 5.2　点 $C(t)$ における接線が実軸となす角

2 つの正則曲線 C_1, C_2 —— C_j の定義域（閉区間）を I_j とする —— について，$C_1(s) = C_2(t)$ をみたす $s \in I_1, t \in I_2$ があるとき，C_1 と C_2 は点 $z_0 := C_1(s) (= C_2(t))$ で**交わる**という．このような s, t の組 (s,t) がただ 1 つしかない場合，z_0 を C_1 と C_2 の**交点**とよぶ．この場合

$$\mathrm{Arg}\, C'_2(t) - \mathrm{Arg}\, C'_1(s)$$

を**交点 z_0 での，C_1 に対する C_2 の交角**という（図 5.3）．

次の事実を確認しておこう：

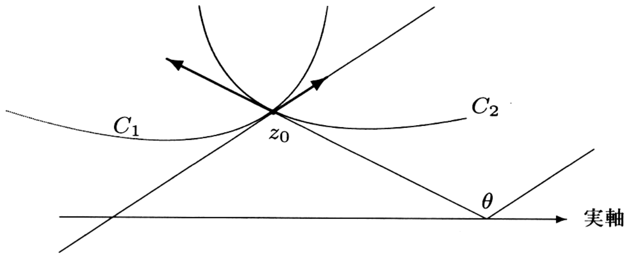


図 5.3　2 つの曲線 C_1, C_2 の交点 z_0 での交角 θ

【補題 5.46】　$f: D \to \mathbb{C}$ は連続かつ単射であるとする．C_1, C_2 を正則曲線とし，z_0 をそれらの交点とする：$z_0 = C_1(s) = C_2(t)$．このとき，点 $f(z_0)$ は $(C_1)_f$ と $(C_2)_f$ の交点である．

証明　$(C_1)_f(s) = f(C_1(s)) = f(z_0) = f(C_2(t)) = (C_2)_f(t)$．もし，別に $s' \in I_1, t' \in I_2$ があって，$f(z_0) = (C_1)_f(s') = (C_2)_f(t')$ が成り立つとすれば，$f(z_0) = f(C_1(s')) = f(C_2(t'))$．$f$ は単射であるから，$z_0 = C_1(s') = C_2(t')$．したがって，$(s', t') = (s, t)$．ゆえに，題意が成立する．∎

この補題に基づいて，次の定義が可能である．$f: D \to \mathbb{C}$ は C^1 級で単射であるとし，C_1, C_2, z_0, s, t を補題 5.46 のものとする．もし

$$\operatorname{Arg}(C_2)_f'(t) - \operatorname{Arg}(C_1)_f'(s) = \operatorname{Arg} C_2'(t) - \operatorname{Arg} C_1'(s)$$

が成り立つならば，f は C_1 と C_2 の交点 z_0 での**交角を保存する**という．

一般に，領域 D を定義域とする C^1 級かつ単射な写像 $f: D \to \mathbb{C}$ が，D 内の任意の 2 つの正則曲線の交角を保存するとき，f を D から $f(D)$ への**等角写像** (conformal mapping) とよぶ．この場合は，「f は等角である」という言い方もする．

【定理 5.47】　$f: D \to \mathbb{C}$ を C^1 級写像で単射であるとする．このとき，f が等角であるための必要十分条件は，f が D 上の単葉な正則関数であることである．

証明　（必要性）　$f_x(z) = -if_y(z), \forall z \in D \cdots (*)$ を示せばよい（第 3 章演習問題 1）．$z_0 = x_0 + iy_0$ を D の任意の点とすれば，D は開集合であるから，あ

る定数 $\delta > 0$ があって，$|z - z_0| < \delta$ ならば $z \in D$．そこで，$\theta \in (-\pi, \pi)$ を任意にとり，z_0 を通る直線 $\ell_\theta(t) = z_0 + te^{i\theta}, |t| < \delta$ を考えると，$\mathrm{R}(\ell_\theta) \subset D$．$w_\theta(t) := f(z_0 + te^{i\theta}) = f(x_0 + t\cos\theta + i(y_0 + t\sin\theta))$ とおくと，合成関数の微分法により

$$w'_\theta(0) = f_x(z_0)\cos\theta + f_y(z_0)\sin\theta.$$

他方，$\ell'_\theta(0) = e^{i\theta}$ であるから，単純な代数的計算により（$\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$，$\sin\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/(2i)$ を使う）

$$\frac{w'_\theta(0)}{\ell'_\theta(0)} = \alpha + \beta e^{-2i\theta}.$$

ただし，$\alpha := (f_x(z_0) - if_y(z_0))/2$, $\beta := (f_x(z_0) + if_y(z_0))/2$．いま，$f$ は z_0 で等角であるから，$\mathrm{Arg}\, w'_\theta(0) - \mathrm{Arg}\, \ell'_\theta(0) = \mathrm{Arg}\, w'_0(0) - \mathrm{Arg}\, \ell'_0(0)$．したがって，$\arg w'_\theta(0)/\ell'_\theta(0)$ は θ によらない．ところが，$\beta \neq 0$ であるとすれば，θ が変化するとき，$\alpha + \beta e^{-2i\theta}$ の偏角は変化するので，矛盾である．したがって，$\beta = 0$．ゆえに，$f_x(z_0) = -if_y(z_0)$．z_0 は D の任意の点であったから，$(*)$ が成り立つ．

（十分性） 点 $z_0 \in D$ を通る任意の正則な曲線を C とし，$z_0 = C(t_0)$ $(t_0 \in \mathbb{R})$ であるとする．このとき，$C_f(t) := f(C(t))$ とおけば，C_f は $w_0 := f(z_0)$ を通る連続微分可能な曲線であり，(5.38) が成り立つ．したがって

$$\arg C'_f(t_0) = \arg C'(t_0) + \arg f'(z_0) \pmod{2\pi}. \tag{5.40}$$

点 $z_0 \in D$ を通る別の任意の正則な曲線 $\widetilde{C}$ についても同様で，$z_0 = \widetilde{C}(s_0)$ とすれば

$$\arg \widetilde{C}'_f(s_0) = \arg \widetilde{C}'(s_0) + \arg f'(z_0) \pmod{2\pi}.$$

したがって，$z = z_0$ での f の等角性が導かれる．$C, \widetilde{C}$ は任意の正則曲線であったから，題意がしたがう．■

関係式 (5.40) は

$$\arg f'(z_0) = \arg C'_f(t_0) - \arg C'(t_0) \pmod{2\pi}$$

と書き換えられる．これは次のことを意味する：点 $f(z_0)$ における曲線 C_f の接線が実軸となす角度と，点 z_0 における曲線 C の接線が実軸となす角度の差は $f'(z_0)$

の偏角に等しい $(\mathrm{mod}\,2\pi)$．こうして微分係数 $f'(z_0)$ の幾何学的意味のひとつが明らかになる．

定理 5.47 からただちに次の事実がしたがう：

【系 5.48】 $f: D \to \mathbb{C}$ は正則かつ単葉であるとする．C_1, C_2 を D 内の 2 つの正則曲線とする．このとき，C_1, C_2 が点 z で直交するための必要十分条件は，2 つの曲線 $(C_1)_f$, $(C_2)_f$ が点 $f(z)$ において直交することである．

この系は次のことを意味する．**単葉な正則関数 f の定義域 D における任意の互いに直交する 2 つの曲線は，f によって，互いに直交する曲線に写される．** 単葉な正則関数の逆写像 f^{-1} も単葉で正則であるから，f^{-1} についても同じことが成立する．この顕著な特性は，物理学におけるポテンシャル論に重要な応用をもつ（本書の第 9 章を参照）．

■ 例 5.15 ■ c, k を実定数とする．z 平面において，直線 $L_1 : x = c$（虚軸に平行な直線）と直線 $L_2 : y = k$（実軸に平行な直線）は点 $c + ik$ において直交する．したがって，単葉な正則関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が点 $c + ik$ の近傍をその定義域の中に含むならば，L_1, L_2 は，w 平面における点 $f(c + ik)$ で直交する曲線に変換される．したがって，c, k を連続的に動かせば，w 平面において，互いに直交する曲線群が構成される．

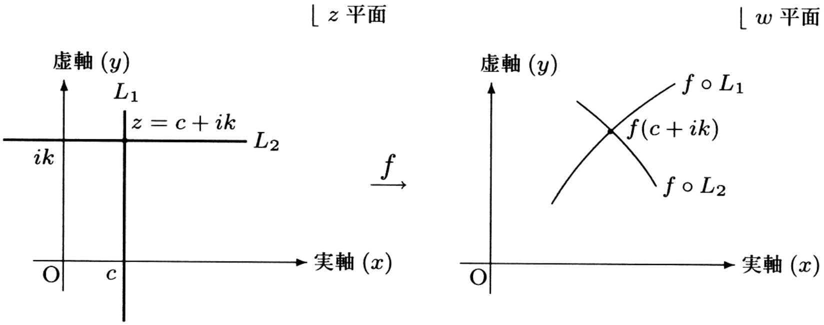


図 5.4 z 平面において直交する直線 L_1, L_2 の変換

■ 例 5.16 ■ $\mathbb{C}$ 上の正則関数 $f(z) = z^2$ について $f'(z) = 2z$ であるから，$f'(z) \neq 0, z \neq 0$．また，上半平面，下半平面，左半平面，右半平面のそれぞれで，f は単葉

である．この f による，直線群 $x=c,\ y=k$ の変換は図 5.5 のようになる．

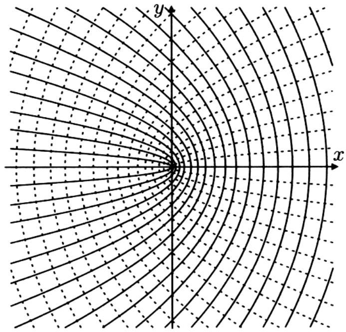


図 5.5 $f(z)=z^2$ による，直線群 $x=c,\ y=k$ の変換

■ **例 5.17** ■ $a>0$ として

$$f_J(z)=z+\frac{a^2}{z},\quad z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

を考える．写像 f_J（あるいはその実定数倍）を**ジューコフスキー変換**という[15]．次の性質は容易に証明することができる：

(i) f_J は z 平面の半径 a の円（中心は原点）を w 平面の線分 $[-2a,2a]$ に写す．

証明 $z=ae^{i\theta},\theta\in[0,2\pi)$ ならば，$w=f_J(z)=2a\cos\theta$． ∎

(ii) f_J は $0<|z|<a$ で単射である．また，半径 $r\in(0,a)$ の円（中心は原点）を w 平面上の楕円

$$\frac{u^2}{A^2}+\frac{v^2}{B^2}=1$$

に写す $(w=u+iv)$．ただし，$A:=r+a^2/r,\ B:=|r-a^2/r|$．したがって，$z$ 平面の領域 $0<|z|<a$ と w 平面の領域 $\mathbb{C}\setminus[-2a,2a]$ は f_J によって 1 対 1 に対応する．

[15] Nikolai Zhukovskii (Joukowski), 1847–1921．ロシアの物理学者．モスクワ大学教授．流体力学，航空力学の建設者．

証明　$f_J(z) - f_J(z') = (z - z')[1 - a^2/(zz')]$．$|z| < a, |z'| < a$ ならば，$|zz'| < a^2$．したがって，$|z| < a, |z'| < a$ かつ $z \neq z'$ ならば $f_J(z) \neq f_J(z')$．ゆえに，f_J は $|z| < a$ で単射である．$z = re^{i\theta}$，$w = f_J(z) = u + iv$ とすれば，$u = (r + a^2/r)\cos\theta, v = (r - a^2/r)\sin\theta$．これと $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いて，θ を消去すればよい．∎

(iii) f_J は $|z| > a$ で単射である．また，半径 $r > a$ の円（中心は原点）を w 平面上の楕円

$$\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} = 1$$

に写す $(w = u + iv)$．したがって，z 平面の半径 a の円の外部 $|z| > a$ と w 平面の領域 $\mathbb{C} \setminus [-2a, 2a]$ は f_J によって 1 対 1 に対応する．

証明　(ii) と同様．∎

演習問題

1．関数列 $f_n(z) = nz/(1 + nz)^2$，$z \notin \{-1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を考える $(n \in \mathbb{N})$．$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = 0$ およびこの収束は $[0, 1]$ 上で一様ではないことを示せ．

2．任意の $\sigma < 1$ に対して，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+z}$ は，$\mathrm{Re}\, z \geq -\sigma$ で一様収束するが，絶対収束はしないことを示せ．

3．$S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \cup \{1\}$ とおく．$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - z)z^n$ は S 上で絶対収束するが，一様収束はしないことを示せ

4．次の級数展開式を証明せよ．

$$\text{(i)}\ \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad \text{(ii)}\ \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

5．(i) $\tanh z$ は $|z| < \pi/2$ で正則であることを示せ．

(ii) (i) によって

$$\tanh z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad |z| < \pi/2$$

とテイラー展開できる．漸化式

$$c_{n+1} = -\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{n+1} c_{n-r} c_r, \quad n \geq 1$$

を示せ．

(iii) $c_{2n} = 0, n \geq 0$ を示せ．したがって

$$\tanh z = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} z^{2n+1}, \quad |z| < \pi/2.$$

(iv) $\tanh z = z - \dfrac{z^3}{3} + \dfrac{2}{15} z^5 + \cdots, \quad |z| < \pi/2$ を示せ．

6. (i) 関数 $\sqrt{1-z}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus (1, \infty))$ は $z = 0$ のまわりで，次の整級数展開（収束は絶対収束）をもつことを示せ．

$$\sqrt{1-z} = 1 - \frac{1}{2} z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{2^n n!} z^n, \quad |z| < 1 \quad \cdots (*)$$

ただし，$(2n-3)!! := (2n-3)(2n-5)\cdots 3 \cdot 1$.

(ii) $(*)$ の右辺の整級数展開は $|z| = 1$ でも絶対収束することを示し，$|z| = 1$ でも $(*)$ が成立することを証明せよ．

7. 関数 $1/\sqrt{1-z}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty))$ は $|z| < 1$ において

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} z^n$$

という整級数（収束は絶対収束）に展開されることを示せ．

8. （**一般 2 項展開**）任意の $\nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して，$|z| < 1$ において

$$(1+z)^\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\nu}{n} z^n$$

と整級数展開されることを証明せよ．ただし

$$\binom{\nu}{n} := \begin{cases} 1 & ; \ n = 0 \\ \dfrac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-n+1)}{n!} & ; \ n \geq 1 \end{cases}$$

9. $\nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とする．$\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，$\overset{\circ}{D}_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \alpha - \pi < \arg z < \alpha + \pi\}$ における，z^ν の枝 z_α^ν は正則である．点 $a \in \overset{\circ}{D}_\alpha$ を任意にとる．このとき

$$z_\alpha^\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \nu \\ n \end{pmatrix} a_\alpha^{\nu-n}(z-a)^n, \quad |z-a| < |a|,\ z \in \overset{\circ}{D}_\alpha$$

を示せ．

注意：この級数の収束半径は，容易にわかるように，$|a|$ である．

10. (i) $|z| < 1$ において

$$\mathrm{Log}\,(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \cdots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

と級数展開されること（収束は絶対収束）を示せ．

(ii) $|z| < 1$ において

$$\mathrm{Log}\,\frac{1+z}{1-z} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

が成立することを示せ．

11. $\cos z$ の零点は $(n+1/2)\pi, n \in \mathbb{Z}$ であり，いずれも単純零点であることを証明せよ．

12. $\mathrm{Re}\,\alpha > 0, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ とする．

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x-\beta)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ を示せ．

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 + \gamma x} dx = \frac{e^{\gamma^2/(4\alpha)}\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}$ を証明せよ．ただし，$\mathrm{Re}\,\alpha^{1/2} > 0$ とする．

13. C を領域 $D \subset \mathbb{C}$ 内の区分的に連続微分可能な単純閉曲線で $C_{\mathrm{int}} \subset D$ となるものとする．

(i) f, g は D で正則な関数で C 上に零点をもたないものとする．このとき

$$N_{fg}(C_{\mathrm{int}}) = N_f(C_{\mathrm{int}}) + N_g(C_{\mathrm{int}})$$

—— $C_{\rm int}$ における fg の零点の個数は，$C_{\rm int}$ における f の零点の個数と g の零点の個数の和に等しいということ —— を証明せよ.

(ii) $f_j,\ j=1,\cdots,n\ (n\geq 2)$ を D で正則な関数とし，各 $f_j\ (j=1,\cdots,n)$ は C 上に零点をもたないものとする．このとき

$$N_{f_1f_2\cdots f_n}(C_{\rm int})=\sum_{j=1}^{n}N_{f_j}(C_{\rm int})$$

を証明せよ.

14. ルーシェの定理（定理 5.35）を応用することにより，代数学の基本定理（定理 4.24）を証明せよ.

6 有理型関数と整関数

この章では，与えられた領域全体で必ずしも正則ではない複素関数の理論の初歩的な部分を論述し，その応用として，整関数の無限乗積表示（因数分解）に関する定理を証明する．まず，準備として，正則関数の孤立特異点なる概念とその分類について述べる．

6.1 孤立特異点

$a \in \mathbb{C}$, $R > 0$ とし，関数 f は $0 < |z-a| < R$ で正則であるとする．関数 f が点 a では定義されていないか，定義されていても点 a で正則でないとき，点 a を f の**孤立特異点** (isolated singular point) という．

正則関数 f の極（第 4 章，4.11 節を参照）は孤立特異点である．

6.1.1 孤立特異点の分類

第 5 章の 5.7 節で見たように，領域 $0 < |z-a| < R$ で正則な関数 f は，点 $z = a$ においてローラン展開をもつ（(5.21) を参照）．そして，ローラン展開は，孤立特異点 a における f の挙動がその主要部 $P_{a,f}$ の特性から決まることを語る．そこで，主要部 $P_{a,f}$ の型に応じて，孤立特異点を分類するのは自然である．

$P_{a,f} = 0$ の場合 (i.e., $c_{-n} = 0, \forall n \geq 1$; (5.23) を参照)，$a$ を f の**除去可能特異点** (removable singularity) という．

この場合，f の a における値を $f(a) := c_0$ と定義することにより（あらかじめ $f(a)$ が定義されている場合には，このように定義し直す）

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad |z-a| < R$$

が成り立つから，f は点 a でも正則である．すなわち，f は $|z-a| < R$ におけ

る正則な関数に拡張される．以後，点 a が f の除去可能特異点の場合には，いま述べた手続きを経て，f は $|z-a|<R$ で正則になっているものとする．

■ **例 6.1** ■　任意の $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して，関数 $\sin \alpha z/z$ は，前もって，$z=0$ で定義されていないが，$z=0$ はこの関数の除去可能特異点であり，$\sin \alpha z/z$ は整関数に拡張される．

証明　$f(z)=\sin \alpha z/z$ とおくと，f は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ で正則である．$\sin z$ のマクローリン展開（例 5.6）を使えば

$$f(z)=\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\alpha z)^{2n}, \quad z \neq 0$$

であるから，$P_{0,f}=0$．したがって，$z=0$ は，関数 f の除去可能特異点である．ゆえに，f は $\mathbb{C}$ 全体で正則な関数，すなわち，整関数に拡張される．■

■ **例 6.2** ■　任意の $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して，関数 $(1-\cos \alpha z)/z^2$ は，前もって，$z=0$ で定義されていないが，$z=0$ はこの関数の除去可能特異点であり，$(1-\cos \alpha z^2)/z^2$ は整関数に拡張される．

証明　$\cos z$ のマクローリン展開（例 5.6）を用いると

$$\frac{1-\cos \alpha z}{z^2}=-\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(\alpha z)^{2n-2}, \quad z \neq 0.$$

したがって，左辺の関数の主要部は 0 であるから，$z=0$ はその除去可能特異点である．ゆえに $(1-\cos \alpha z)/z^2$ は整関数に拡張される．■

$P_{a,f}(z)$ が恒等的に零でない場合，次の 2 つの場合が可能である：

(i) $P_{a,f}$ の展開係数 c_{-n} $(n=1,2,\cdots)$ のうち，少なくともひとつは 0 でなく，かつ 0 でない c_{-n} の個数が有限個である場合．

(ii) $c_{-n} \neq 0$ となる c_{-n} が無限個ある場合．

(i) の場合，実は次の事実が成立する．

【補題 6.1】　(i) の条件と，a が f の極であることは同値である．

証明　(i) が成り立つとする．このとき，$c_{-n} \neq 0$ である番号 n があって

$$P_{a,f}(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} = \frac{h(z)}{(z-a)^n}$$

と書ける．ただし，$h(z) = \sum_{k=1}^{n} c_{-k}(z-a)^{n-k}$．これとローラン展開により，$0 < |z-a| < R$ において $f(z) = g(z)/(z-a)^n$ と書ける．ただし，$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-a)^{j+n} + h(z)$．$g$ は点 a で正則であり，$g(a) = c_{-n} \neq 0$．したがって，点 a は，f の n 位の極である．

逆に，点 a が f の n 位の極であれば，$G(z) := (z-a)^n f(z)$ は点 a において正則であり，$G(a) \neq 0$ をみたす．$G(z)$ のテイラー展開 $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(z-a)^k$ を用いると

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} d_{n+m}(z-a)^m + \frac{d_{n-1}}{z-a} + \cdots + \frac{d_0}{(z-a)^n}.$$

$d_0 = G(a) \neq 0$ であるから，$P_{a,f} \neq 0$．しかも，主要部は有限項の和である．よって，(i) が成り立つ．　■

上の補題により，f の極の位数というのは，$c_{-n} \neq 0$ となる n のうちで最大のものであることがわかる．

零点の場合と同様，n 位の極は，個数が n 個の極であると規約する．したがって，f の，領域 D 内にある相異なる極をすべて集めたものを $a_1, \cdots, a_k$ とし，各 a_j の位数を n_j とすれば，D 内での f の極の個数は $\sum_{j=1}^{k} n_j$ となる．

上記の (ii) の場合，a を f の**真性特異点** (essential sigularity) という．この命名の意は，いまの場合，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$(z-a)^n f(z)$ は $z = a$ で正則にならない，という点にある．(つまり，点 a における f の特異性の度合いがたいへん高いということ．)

■ 例 6.3 ■　関数 $f(z) = e^{1/z}$ $(z \neq 0)$ について，$z = 0$ はその真性特異点である．なぜなら，この関数のローラン展開は

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots + \frac{1}{n!z^n} + \cdots$$

であり，主要部は $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n!z^n)$ だからである．

こうして，正則関数の孤立特異点には 3 種類あることがわかる．

6.1.2 除去可能特異点定理

次の定理は，ある点が除去可能特異点かどうかを判定するための基本的定理である．

【定理 6.2】(リーマンの除去可能特異点定理) 関数 f は $0 < |z-a| < R$ で正則であるとし，点 a は f の孤立特異点であるとする．もし，関数 f が $0 < |z-a| < R$ で有界（i.e., 定数 M があって，$|f(z)| \leq M$ $(0 < |z-a| < R)$ が成り立つ）ならば，点 a は f の除去可能特異点である．

証明 $c_{-n} = 0, \forall n \geq 1$ を示せばよい．$0 < r < R$ とすれば，(5.22) により

$$c_{-n} = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})(re^{it})^{n-1} re^{it} dt$$

であるから，$|c_{-n}| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Mr^n dt = Mr^n$．$r \in (0, R)$ は任意でよいから，$r \downarrow 0$ とすれば，$n \geq 1$ に対して，$|c_{-n}| = 0$．したがって，$c_{-n} = 0, \forall n \geq 1$． ■

次の事実もしばしば有用である：

【系 6.3】 関数 f は $0 < |z-a| < R_0$（$R_0 > 0$ は定数）で正則であるとし，a は f の孤立特異点であるとする．もし，極限 $\lim_{z \to a} f(z)$ が存在するならば，a は f の除去可能特異点である．

証明 $w_0 := \lim_{z \to a} f(z)$ とすれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，正数 $R < R_0$ があって $0 < |z-a| < R$ ならば，$|f(z) - w_0| < \varepsilon$ が成り立つ．したがって，$0 < |z-a| < R$ ならば，$|f(z)| \leq |f(z) - w_0| + |w_0| < \varepsilon + |w_0|$．これは，$f(z)$ が $0 < |z-a| < R$ で有界であることを意味する．ゆえに，定理 6.2 により，a は f の除去可能特異点である． ■

■ 例 6.4 ■ 方程式 $e^z = 1$ の解は，$z = 2n\pi i, n \in \mathbb{Z}$ であるから，関数 $f_{\mathrm{B}}(z) := z/(e^z - 1)$ は領域 $\mathbb{C} \setminus \{2n\pi i \mid n \in \mathbb{Z}\}$ で正則である．特に，$0 < |z| < 2\pi$ で正則である．したがって，f_{B} は $z = 0$ のまわりにローラン展開される．第 2 章演習問題 9 によって，$\lim_{z \to 0} f_{\mathrm{B}}(z) = 1$ であるから，系 6.3 によって，$z = 0$ は f_{B} の除去可能特異点である．したがって

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n, \quad 0 < |z| < 2\pi \tag{6.1}$$

という形の冪級数展開が得られる．ただし，展開係数を $B_n/n!$ と書いた $(B_0=1)$．右辺に現れた数 B_n $(n=0,1,2,\cdots)$ は**ベルヌーイ数** (Bernoulli number) とよばれる数であり，数学や数理物理学の様々な場面で現れる興味深い数のひとつである[1]．ローラン展開の展開係数に対する公式 (5.22) から

$$B_n = \frac{n!}{2\pi i}\int_K \frac{z}{e^z-1}\cdot\frac{1}{z^{n+1}}dz. \tag{6.2}$$

ただし，$K(t):=Re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$ $(0<R<2\pi)$．

数列 $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対する漸化式を導こう．任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して, $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}z^n/n!$ であるから

$$f_{\mathrm{B}}(z) = \frac{1}{1+h_{\mathrm{B}}(z)}$$

と表される．ただし

$$h_{\mathrm{B}}(z) := \sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!} = \frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots.$$

関数 h_{B} は整関数である．f_{B} は $|z|<2\pi$ において正則であるから

$$B_n = f_{\mathrm{B}}^{(n)}(0). \tag{6.3}$$

$1-f_{\mathrm{B}}(z)=f_{\mathrm{B}}(z)h_{\mathrm{B}}(z)$ であるから，両辺を原点で n 回微分すれば $(n\geq 1)$

$$-f_{\mathrm{B}}^{(n)}(0) = \sum_{r=0}^{n}{}_nC_r f_{\mathrm{B}}^{(n-r)}(0)h_{\mathrm{B}}^{(r)}(0)$$

が得られる．ただし，${}_nC_r := n!/[(n-r)!r!]$．これと $h_{\mathrm{B}}^{(r)}(0)=r!/(r+1)!$ $(r\geq 1)$ に注意すれば，ベルヌーイ数に関する漸化式

$$B_n = -\sum_{r=1}^{n}\frac{n!}{(n-r)!(r+1)!}B_{n-r}, \quad n\geq 1 \tag{6.4}$$

が導かれる．これで，ベルヌーイ数は原理的に求まったことになる．(6.4) を用いて，$n=1,2,3,4$ の場合を計算すれば次の結果を得る：

$$B_1=-\frac{1}{2}, \quad B_2=\frac{1}{6}, \quad B_3=0, \quad B_4=-\frac{1}{30}. \tag{6.5}$$

他方，ベルヌーイ数は (6.2) を用いても計算できるはずであり，こちらからはベル

---

[1] Jakob Bernoulli （1654–1705, スイス）．ベルヌーイ家（スイス，バーゼル）は，17 世紀末から約 1 世紀の間に 8 人におよぶ優秀な数学者を輩出し，数学および数理物理学の発展に多大な貢献をした．

ヌーイ数に対する別の表式が得られることが期待される．実際，そうであることが以下のようにしてわかる．(6.2) の右辺の積分を計算するために留数定理を応用することを考える．関数 $f_n(z) := z/[(e^z-1)z^{n+1}]$ の極が $z=2\pi ip$, $p\in\mathbb{Z}$ にあることを考慮して，$R_N=(2N+1)\pi$ $(N\in\mathbb{N})$ とし，曲線

$$\begin{aligned}C_N = \{R_N + iy \mid -R_N \le y \le R_N\}\\ \cdot\{t(-R_N+iR_N)+(1-t)(R_N+iR_N) \mid 0\le t\le 1\}\\ \cdot\{t(-R_N-iR_N)+(1-t)(-R_N+iR_N) \mid 0\le t\le 1\}\\ \cdot\{x-iR_N \mid -R_N\le x\le R_N\}\end{aligned}$$

── 原点を中心とする一辺の長さが $2R_N$ の正方形を反時計回りに一周する曲線（図6.1 を参照）── に関する積分を考えると，留数定理により

$$\int_{C_N} f_n(z)dz = \sum_{p=-2N}^{2N} 2\pi i\,\mathrm{Res}\,(2\pi ip, f_n).$$

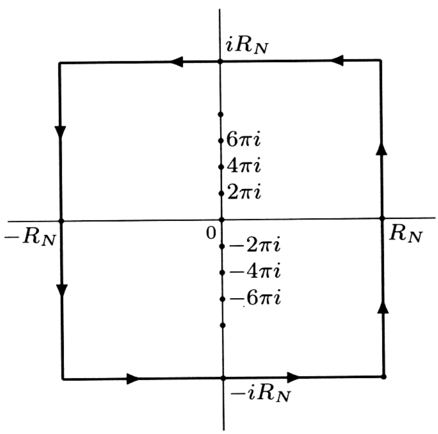


図 6.1 曲線 C_N

一方，$n\ge 2$ のとき $\lim_{N\to\infty}\int_{C_N} f_n(z)dz = 0$ を示すのは難しくない．したがって

$$\sum_{p\in\mathbf{Z}} \mathrm{Res}\,(2\pi ip, f_n) = 0, \quad n\ge 2.$$

これは，$\mathrm{Res}\,(0,f_n) = -\sum_{p=-\infty}^{-1}\mathrm{Res}\,(2\pi ip,f_n) - \sum_{p=1}^{\infty}\mathrm{Res}\,(2\pi ip,f_n)$ を意味す

る（各々の無限級数の収束性は以下の (*) によって正当化される）．一方，(6.2) は $B_n/n! = \mathrm{Res}\,(0, f_n)$ を意味する．したがって

$$\frac{B_n}{n!} = -\sum_{p=-\infty}^{-1} \mathrm{Res}\,(2\pi ip, f_n) - \sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{Res}\,(2\pi ip, f_n).$$

関数 f_n の極 $z = 2\pi ip$ $(p \neq 0)$ は 1 位である．したがって

$$\mathrm{Res}\,(2\pi ip, f_n) = \frac{1}{(2\pi ip)^n} \quad \cdots (*)$$

n が奇数 $n = 2m+1$ の場合は，$\mathrm{Res}\,(2\pi ip, f_n) = -\mathrm{Res}\,(2\pi i(-p), f_n)$ であるから

$$B_{2m+1} = 0, \quad m = 1, 2, \cdots. \tag{6.6}$$

n が偶数 $n = 2m$ の場合は

$$\frac{B_{2m}}{(2m)!} = -2\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi ip)^{2m}}.$$

ゆえに

$$B_{2m} = -\frac{2(2m)!(-1)^m}{(2\pi)^{2m}}\zeta(2m), \quad m = 1, 2, \cdots. \tag{6.7}$$

ここで，$\zeta(z)$ は例 5.2 で導入したリーマンのゼータ関数である．こうして，リーマンのゼータ関数とベルヌーイ数の間にある関係が存在することがわかる．これは，言い換えれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} = (-1)^{m+1}\frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!}B_{2m} \tag{6.8}$$

ということであり，左辺の級数の和がベルヌーイ数を用いて求められたことになるのである（B_n は (6.4) によって求められているとみなす）．たとえば，(6.5) を代入すれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \tag{6.9}$$

という和公式が得られる．

6.1.3　真性特異点の性質

真性特異点については，次の興味深い性質がある．

【定理 6.4】（ヴァイエルシュトラースの定理） 関数 f は $0 < |z-a| < R$ で正則であるとし，a は f の真性特異点であるとする．このとき，任意の複素数 $\gamma \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$（広義の複素平面；2.13 節を参照）に対して，点 a に収束する点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(z_n \neq a, n \in \mathbb{N})$ があって $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \gamma$ が成り立つ．

証明 (i) $\gamma = \infty$ の場合．仮に，a に収束するどんな点列 $\{z_n\}_n$ をとっても，$f(z_n)$ が ∞ に収束しないとすれば，ある定数 $\delta \in (0, R)$ があって

$$M := \sup_{0<|z-a|<\delta} |f(z)| < +\infty$$

が成り立つということであるから，$|f(z)| \leq M,\ 0 < |z-a| < \delta$．したがって，リーマンの除去可能特異点定理（定理 6.2）により，a は f の除去可能特異点であるので，矛盾が生じる．

(ii) $\gamma \in \mathbb{C}$ の場合．仮に，a に収束するどんな点列 $\{z_n\}_n$ をとっても，$f(z_n)$ が γ に収束しないとすれば，ある定数 $\delta \in (0, R)$ があって

$$m := \inf_{0<|z-a|<\delta} |f(z) - \gamma| > 0$$

が成り立つということであるから，$|f(z) - \gamma| \geq m,\ 0 < |z-a| < \delta$．そこで，$F(z) := 1/(f(z) - \gamma) \cdots (*)$ とおけば，$F(z)$ は $0 < |z-a| < \delta$ で正則であり，$|F(z)| \leq 1/m,\ 0 < |z-a| < \delta$．したがって，リーマンの除去可能特異点定理により，$z = a$ は F の除去可能特異点である．ゆえに，F は $|z-a| < \delta$ で正則であるとしてよい．$(*)$ を $f(z)$ について解けば，$f(z) = 1/F(z) + \gamma,\ 0 < |z-a| < \delta$ が成り立つ．したがって，もし，$z = a$ が F の零点ならば，$z = a$ は f の極である（定理 5.30 の応用）．また，$z = a$ が F の零点でないならば，f は $z = a$ の近傍で有界になるので，リーマンの除去可能特異点定理により，$z = a$ は f の除去可能特異点である．したがって，いずれの場合も矛盾は生じる． ■

次の定理は，与えられた点が正則関数の極であることを特徴づける定理である．

【定理 6.5】 関数 f は $0 < |z-a| < R$ で正則であるとする．このとき，点 a が f の極であるための必要十分条件は $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$ が成り立つことである．

証明 （必要性） 点 a が f の極であるとしよう．このとき，自然数 n と a のある近傍 U で正則な関数 g $(g(a) \neq 0)$ があって，$f(z) = g(z)/(z-a)^n, z \in U$ と書

ける．したがって，$|f(z)| = |g(z)|/|z-a|^n \to +\infty$ ($|z-a| \to 0$ のとき)．ゆえに $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$.

(十分性)　対偶を示そう．そこで，a が f の極でないとする．このとき，a は f の除去可能特異点であるか，真性特異点のどちらかである．前者の場合，$|f(z)|$ は $z = a$ の近傍で有界であるので，$\lim_{z\to a} |f(z)| \neq +\infty$．また，後者の場合，定理 6.4 によって，任意の $\gamma \in \mathbb{C}$ に対して，$f(z_n) \to \gamma$ $(n \to \infty)$ となる点列 $\{z_n\}_n$ ($z_n \to a$ $(n \to \infty)$) がとれるので，$|f(z_n)| \to |\gamma| < +\infty$ $(n \to \infty)$．したがって，$\lim_{z\to a} |f(z)| \neq +\infty$ である[2)]． ■

真性特異点については，実は，ヴァイエルシュトラースの定理（定理 6.4）よりも強い，次の驚くべき事実が知られている．

【定理 6.6】(ピカールの定理[3)])　関数 f は $0 < |z-a| < R$ で正則であるとし，a は f の真性特異点であるとする．このとき，任意の $\delta \in (0, R)$ に対して，f は領域 $0 < |z-a| < \delta$ 上で高々 1 つの値を除いてすべての値を無限回とる（f がとらない値を**ピカールの除外値**という）．

ここでは，この定理の証明は割愛する[4)]．

■ **例 6.5** ■　例 6.3 で見たように，関数 $e^{1/z}$ は $z = 0$ に真性特異点をもつ．任意の $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ と $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対して $z_n = 1/(\mathrm{Log}\,\gamma + 2\pi i n)$ とおけば，$e^{1/z_n} = \gamma$．したがって，関数 $e^{1/z}$ は γ という値を無限回とる．一方，$e^{1/z} = 0$ となる $z \in \mathbb{C}$ は存在しない．したがって，この関数に対するピカールの除外値は 0 である．$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ に注意せよ．

6.1.4　無限遠点が特異点の場合

関数の値域だけでなく，定義域にも無限遠点を含めて考えると便利な場合がある．いま，関数 f が領域 $\{z \in \mathbb{C} \mid R < |z| < +\infty\}$ で正則であるとしよう．$\zeta = 1/z$ と変数変換を行い，ζ の関数 $f(1/\zeta)$ を考えると，これは $0 < |\zeta| < 1/R$ で正則である．したがって，それは $\zeta = 0$ のまわりに次のようにローラン展開できる：

---

2) $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$ は，z を a にどんな仕方で近づけても $|f(z)| \to +\infty$ が成り立つ，という意味であることに注意．

3) Emile Picard (1856–1941)．フランスの数学者．

4) たとえば，辻 正次『複素函数論』(槙書店，1968) の第 16 章，6 節の定理 XVI.14 を参照．

$$f(z) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{\zeta^n}, \quad 0 < |\zeta| < \frac{1}{R}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n, \quad R < |z| < +\infty. \tag{6.10}$$

ただし

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(1/\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \quad K(t) := re^{it},\, t \in [0, 2\pi]\ (0 < r < 1/R).$$

展開式 (6.10) を**無限遠点 $z = \infty$ における f のローラン展開**という．この展開において，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$ を**無限遠点 $z = \infty$ における f の主要部**という．

$\zeta = 0$ が ζ の関数 $f(1/\zeta)$ の除去可能特異点ならば，$f(\infty) := a_0$ とおき，f は**無限遠で正則**であるという．この場合

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \quad R < |z|$$

と展開できる．

$\zeta = 0$ が ζ の関数 $f(1/\zeta)$ の k 位の極ならば，f は**無限遠点 $z = \infty$ で k 位の極をもつ**という．この場合は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} + \sum_{n=1}^{k} a_{-n} z^n, \quad R < |z| < +\infty$$

と展開される．

$\zeta = 0$ が ζ の関数 $f(1/\zeta)$ の k 位の零点ならば，f は**無限遠点 $z = \infty$ で k 位の零点をもつ**という．この場合は

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \quad R < |z| < +\infty$$

と展開される．

$\zeta = 0$ が ζ の関数 $f(1/\zeta)$ の真性特異点ならば，f は**無限遠点 $z = \infty$ で真性特異点をもつ**という．この場合は，(6.10) の展開式において，$a_{-n} \neq 0$ なる a_{-n} は無限個存在する．

f の無限遠点における留数は

$$\mathrm{Res}\,(\infty, f) := -a_1 \tag{6.11}$$

によって定義される．

6.2 有理型関数

真性特異点をもたないような関数のクラスを定義する．

複素関数 f は，点 a において正則であるか，または極をもつとき，点 a において**有理型** (meromorphic) であるという．f が領域 D の各点において有理型であるとき，f は D で有理型であるといい，この場合，f を D 上の**有理型関数** (meromorphic function) とよぶ．

【定理 6.7】 f, g が領域 D で有理型ならば，$f \pm g$, fg, f/g も D で有理型である．ただし，関数 f/g においては，g が恒等的に 0 の場合は除外する．

証明 $f \pm g, fg$ については容易である．f/g については，定理 5.30 を使えばよい． ∎

■ 例 6.6 ■ 有理関数，すなわち，2 つの多項式 P, Q の比で表される関数 $Q(z)/P(z)$（例 1.9）── $P(z)$ は恒等的に零でないとする ── は有理型関数である．

■ 例 6.7 ■ $1/\sin z$, $1/\cos z$, $\tan z$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数である．

正則関数に関する一致の定理は有理型関数の場合へと拡張される：

【定理 6.8】（一致の定理） f, g を広義の複素平面 $\hat{\mathbb{C}}$ の領域 D における有理型関数とする．D 内に集積点をもつ集合 A において $f(z) = g(z)$ が成立するならば，D 上で $f(z) = g(z)$ である．

証明 A の集積点の任意の 1 つを a とすれば，仮定により，$a \in D$．このとき，f と g はそれぞれ，a で正則であるか，a を極としてもつか，のどちらかである．しかし，いずれの場合でも，適当に整数 $n \geq 0$ をとり，$F(z) := (z-a)^n f(z)$, $G(z) := (z-a)^n g(z)$ とすれば，F, G は a の十分小さな近傍 ── $U_r(a)$ $(r > 0)$ としよう ── で正則である．明らかに，A 上で $F(z) = G(z)$．したがって，正則関数に関する一致の定理（系 5.25）により，$F(z) = G(z), z \in U_r(a)$．これは，$f(z) = g(z), z \in U_r(a) \setminus \{a\} \cdots (*)$ を意味する．ゆえに，f と g は $z = a$ で同じローラン展開をもつ．f, g の D 内の極の集合をそれぞれ，$\{a_k\}_k, \{b_\ell\}_\ell$ とし，$D_0 := D \setminus (\{a_k\}_k \cup \{b_\ell\}_\ell)$ とすれば，D_0 は領域であり（後の注意 6.1 を参照），

f, g は D_0 で正則である．これと (∗) および正則関数に関する一致の定理により，$f(z) = g(z), z \in D_0$．すると，$z = a_k, b_\ell$ においても f と g は同じローラン展開をもつことになる．したがって，a_k は g の極でもあり，b_ℓ は f の極でもあることになるから，$\{a_k\}_k = \{b_\ell\}_\ell$．よって，$D$ 上で $f = g$ である． ∎

6.3 偏角の原理

正則関数の零点の個数に関する定理（定理 5.31）の有理型関数版は次の形をとる：

【定理 6.9】 D を $\mathbb{C}$ の領域とし，C を D 内の区分的に連続微分可能な単純閉曲線で（向きは正の向きにとる），$C_{\rm int} \subset D$ となるものとする．f を D 上の有理型関数とし，$C_{\rm int}$ 内にある，f の零点および極の個数をそれぞれ，N, P とする．また，f は C 上では零点をもたないとする．このとき

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz. \tag{6.12}$$

証明　$C_{\rm int}$ における f の相異なる零点を $a_1, \cdots, a_k$ とし，相異なる極を $b_1, \cdots, b_\ell$ とする．このとき，定理 4.10 により

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{k}\int_{C(a_j)} \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \sum_{q=1}^{\ell}\int_{C(b_q)} \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

ただし，$C(a) := a + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$（$r > 0$ は十分小）．すでに知っているように（定理 5.31），$\int_{C(a_j)} f'(z)/f(z)dz = 2\pi i n_j \cdots (*)$ である．ただし，n_j は a_j の位数である．$C(b_q)$ 上およびその内部では $f(z) = g(z)/(z - b_q)^{m_q}$ と書ける．ただし，m_q は極 b_q の位数であり，$g(z)$ は，$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - b_q| \le r\}$ を含む領域で正則で $g(z) \ne 0, |z - b_q| \le r$ をみたす．関数の積の微分法により，$f'(z) = g'(z)/(z - b_q)^{m_q} - m_q g(z)/(z - b_q)^{m_q+1}$．したがって，$f'(z)/f(z) = g'(z)/g(z) - m_q/(z - b_q)$．ゆえに $\int_{C(b_q)} f'(z)/f(z)dz = -m_q(2\pi i)$．これと (∗) をあわせれば

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = (2\pi i)\sum_{j=1}^{k} n_j - (2\pi i)\sum_{q=1}^{\ell} m_q = 2\pi i(N - P).$$

よって，(6.12) が得られる． ∎

f, C, N, P を定理 6.9 のものとしよう．このとき，公式 (5.31) を用いると，(6.12) は

$$n(C_f, 0) = N - P \tag{6.13}$$

を導く．これは，幾何学的には，**C の内部にある，f の零点の個数と極の個数の差が，曲線 $C_f = f \circ C$ の原点のまわりの回転数に等しい**ことを示す．意味論的には，曲線 C に沿っての有理型関数 f の偏角の変化と，零点と極の個数との間にある法則性のひとつを表すものである（命題 5.33 を参照）．そこで，定理 6.9 を**偏角の原理**とよぶ．言うまでもなく，この事実は，正則関数の零点の個数と偏角の関係に関する事実（(5.32) あるいは命題 5.34）の有理型関数版であり，ここに至って，はじめて，事の本質が見えてくるのである．

定理 6.9 は次のように一般化することができる：

【定理 6.10】 D を $\mathbb{C}$ の領域とし，C を D 内の区分的に連続微分可能な単純閉曲線で（向きは正の向きにとる），$C_{\rm int} \subset D$ となるものとする．f を D 上の有理型関数とし，$C_{\rm int}$ 内にある，f の相異なる零点を $a_1, \cdots, a_k$ とし，各 a_j の位数を n_j とする．また，$C_{\rm int}$ 内にある，f の相異なる極を $b_1, \cdots, b_\ell$ とし，各 b_q の位数を m_q とする．ϕ を $\bar{C}_{\rm int}$ を含む領域で正則な関数とする．このとき

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\phi(z)dz = \sum_{j=1}^{k} n_j\phi(a_j) - \sum_{q=1}^{\ell} m_q\phi(b_q). \tag{6.14}$$

証明　定理 5.31 と定理 6.9 の証明とまったく同様．ただ，いまの場合には，コーシーの積分表示 $\int_{C(a_j)} \phi(z)/(z-a_j)dz = 2\pi i\phi(a_j), \int_{C(b_q)} \phi(z)/(z-b_q)dz = 2\pi i\phi(b_q)$ を使う必要がある（$C(a)$ は定理 6.9 の証明で言及したもの）． ∎

言うまでもなく，(6.14) で $\phi \equiv 1$ の場合が (6.12) である．

【系 6.11】　定理 6.10 の仮定のもとで，すべての $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}z^N dz = \sum_{j=1}^{k} n_j a_j^N - \sum_{q=1}^{\ell} m_q b_q^N. \tag{6.15}$$

証明　(6.14) で $\phi(z) = z^N$ とすればよい． ∎

6.4 部分分数展開

有理型関数 f は，その任意の極 —— a としよう —— のまわりにローラン展開できる．この場合，a の位数を n とすれば，主要部 $P_{a,f}(z)$ は

$$P_{a,f}(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{-j}}{(z-a)^j}$$

という形で与えられる（c_{-j} は定数）．この部分は，分数関数 $(z-a)^{-j}$ による展開とみることができる．そこで，もっと一般に，f の相異なる極が $a_1, \cdots, a_N$ であるとき，f を分数関数 $(z-a_k)^{-n_k}$ $(k=1,\cdots,N;\ n_k \in \mathbb{N})$ を用いて展開することを考える．

この方向の研究の手始めとし，まず，有理型関数の簡単なクラスである有理関数の場合について調べよう．すぐあとで証明する定理のための補題をひとつ用意する．

【補題 6.12】 f を有理関数とする．このとき，正数 $R>0$ と自然数 n があって，$|z| \geq R$ ならば，$|f(z)| \leq |z|^n$ が成り立つ．

証明 $f(z) = Q(z)/P(z)$ と書ける．ただし，P, Q は多項式である．一般に，$F(z) = \alpha_m z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$ $(\alpha_j \in \mathbb{C},\ j=0,\cdots,m;\ \alpha_m \neq 0)$ とすれば，$F(z) = \alpha_m z^m (1+G(z))$．ただし

$$G(z) := \frac{\beta_{m-1}}{z} + \frac{\beta_{m-2}}{z^2} + \cdots + \frac{\beta_0}{z^m}, \quad \beta_j := \frac{\alpha_j}{\alpha_m}.$$

3 角不等式により，$|z| \geq R_1 > 0$ ならば，

$$|G(z)| \leq C_1 := \frac{|\beta_{m-1}|}{R_1} + \frac{|\beta_{m-2}|}{R_1^2} + \cdots + \frac{|\beta_0|}{R_1^m}.$$

したがって

$$|F(z)| \leq |\alpha_m||z|^m(1+C_1), \quad |z| \geq R_1.$$

任意の定数 $\beta \in \mathbb{C}$ に対して，$\beta/R \to 0$ $(R \to \infty)$ であるから，必要ならば，R_1 を取り直すことにより，$C_1 < 1$ として一般性を失わない．3 角不等式により

$$|F(z)| \geq |\alpha_m||z|^m(1-|G(z)|) \geq |\alpha_m||z|^m(1-C_1).$$

したがって，$K_1 := |\alpha_m|(1-C_1)$, $K_2 := |\alpha_m|(1+C_1)$ とおけば，$K_1|z|^m \le |F(z)| \le K_2|z|^m, |z| \ge R_1$．この事実を $F = P, Q$ に応用すれば, P, Q の次数をそれぞれ p, q とするとき, 正の定数 $c_1, c_2, d_1, d_2, R_1, R_2$ があって, $c_1|z|^p \le |P(z)| \le c_2|z|^p, |z| \ge R_1$ および $d_1|z|^q \le |Q(z)| \le d_2|z|^q, |z| \ge R_2$ が成立することがわかる．そこで，$R := \max\{R_1, R_2\}$ とすれば，$|f(z)| \le d_2|z|^q/c_1|z|^p$, $|z| \ge R$ が成り立つ．もし，$q \le p$ ならば $|f(z)| \le d_2/(c_1R^{p-q})$．したがって，十分大きな定数 $R' > 0$ をとれば，$|f(z)| \le R' \le |z|, |z| \ge R'$ とできる．また，$q > p$ ならば $|f(z)| \le d_2|z|^{q-p}/c_1$．この場合も，十分大きな定数 R' をとれば，$|f(z)| \le R'|z|^{q-p} \le |z|^{1+q-p}$, $|z| \ge R'$ とできる．よって，いずれの場合でも題意が成立する． ■

【定理 6.13】 f を有理関数とし，その相異なる極を $a_1, \cdots, a_N$ とする．このとき，z の多項式 $P(z)$ が存在して

$$f(z) = P(z) + \sum_{n=1}^{N} P_{a_n,f}(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{a_n \mid n = 1, \cdots, N\} \tag{6.16}$$

が成り立つ．

証明　$P(z) := f(z) - \sum_{n=1}^N P_{a_n,f}(z), z \notin \{a_n \mid n = 1, \cdots, N\}$; $P(a_n) := c_0^{(n)}$（点 a_n での f のローラン展開における $z - a_n$ の 0 次の係数）とおけば，ローラン展開に関する定理（定理 5.27）により，$P(z)$ は整関数である．$P(z)$ が多項式であることを示そう．3 角不等式により

$$|P(z)| \le |f(z)| + \sum_{n=1}^{N} |P_{a_n,f}(z)|.$$

補題 6.12 により, 定数 $R_0 > 1$ と自然数 m が存在して $|f(z)| \le |z|^m$, $|z| \ge R_0$ が成り立つ．$\lim_{|z|\to\infty} P_{a_n,f}(z) = 0$ であるから, 定数 $R_1 > 1$ と $C > 0$ が存在して $\sum_{n=1}^N |P_{a_n,f}(z)| \le C, |z| \ge R_1$ が成り立つ．したがって，$|P(z)| \le |z|^m + C \le (1+C)|z|^m$, $|z| \ge \max\{R_0, R_1\} > 1$．ゆえに，第 4 章の演習問題 10 により，$P(z)$ は高々 m 次の多項式である． ■

公式 (6.16) を有理関数 f の**部分分数展開**という．

次に，より一般の有理型関数を考える．

【定理 6.14】 f を $\mathbb{C}$ 上の有理型関数とし，その極 a_n の位数はすべて 1 で ($n \neq m$ ならば $a_n \neq a_m$ とする)，極 a_n に関する主要部を $\dfrac{\gamma_n}{z-a_n}$ とする（相異なる極の個数が有限個 M の場合は，$\gamma_n = 0, n > M$ とする）．また，f は $z=0$ で正則であるとする．さらに，区分的に連続微分可能な単純閉曲線 C_n ($n = 1, 2, \cdots$)（向きは正）で次の性質をもつものがとれるとする：

(i) $0 \in (C_n)_{\rm int}$, $n \in \mathbb{N}$ かつ $\mathsf{R}(C_n) \subset (C_{n+1})_{\rm int}$, $n \in \mathbb{N}$.

(ii) f は各 C_n 上で正則.

(iii) $R_n := \inf_{z \in \mathsf{R}(C_n)} |z|$（原点から $\mathsf{R}(C_n)$ までの最短距離）とすれば，$R_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ かつ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max_{z\in\mathsf{R}(C_n)} |f(z)|}{R_n^2} L(C_n) = 0. \tag{6.17}$$

ただし，$L(C_n)$ は C_n の長さである．

このとき

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} \right). \tag{6.18}$$

証明 C_n の内部にある，f の極を $a_1, \cdots, a_N$ とする．$z \neq 0, a_k$ $(k = 1, \cdots, N)$ を C_n の内部の任意の点とし，積分

$$I_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta$$

を考える．ζ の関数 $f(\zeta)/[\zeta(\zeta - z)]$ の，C_n の内部にある極は a_k $(k = 1, \cdots, N)$, $\zeta = 0$, $\zeta = z$ で，位数はすべて 1 である．したがって，留数定理により

$$I_n = \frac{f(z)}{z} - \frac{f(0)}{z} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma_k}{a_k(a_k - z)}. \tag{6.19}$$

一方，I_n の定義と条件 (6.17) により（C_n の定義域を $[s_n, t_n]$ とする）

$$\begin{aligned} |I_n| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{s_n}^{t_n} \frac{|f(C_n(t))|}{|C_n(t)||C_n(t) - z|} |C_n'(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{\max_{\zeta \in \mathsf{R}(C_n)} |f(\zeta)|}{R_n^2} L(C_n) \cdot \frac{R_n}{R_n - |z|} \\ &\to 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

したがって，(6.19) より

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k z}{a_k(z - a_k)}.$$

そこで

$$\frac{z}{a_k(z - a_k)} = \frac{1}{z - a_k} + \frac{1}{a_k}$$

に注意すれば (6.18) が得られる. ∎

■ **例 6.8** ■　$f(z) = \cot z - 1/z$ とおく．$\cos z, \sin z$ のマクローリン展開を用いると

$$f(z) = \frac{z\cos z - \sin z}{z \sin z} = \frac{-\frac{1}{3}z^3 + \cdots}{z \sin z} = \frac{-z/3 + \cdots}{(\sin z)/z}, \qquad z \neq 0.$$

すでに知っているように，$\sin z/z$ は整関数とみなせる．したがって，f は $f(0) = 0$ とすることにより，$z = 0$ で正則であるとみなすことができる．ゆえに，f の極の集合は，$\{n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ であり，各極の位数は 1 である．また，$z = n\pi$ での留数は

$$\gamma_n := \lim_{z \to n\pi} (z - n\pi) f(z) = \frac{\cos n\pi}{\lim_{z \to n\pi}[\sin z/(z - n\pi)]} = \frac{\cos n\pi}{\cos n\pi} = 1.$$

ここで，$\sin z = \sin(z - n\pi + n\pi) = \sin(z - n\pi)\cos n\pi + \cos(z - n\pi)\sin n\pi = \sin(z - n\pi)\cos n\pi$ を用いた．したがって，$z = n\pi$ における f の主要部は $1/(z - n\pi)$ である．

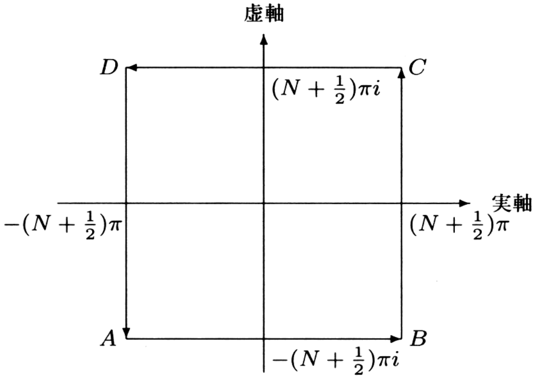


図 6.2　積分路 C_N

さて，$N \geq 1$ に対して，C_N を，4 個の点 $A:\ -(N+1/2)\pi - i(N+1/2)\pi$, $B:\ (N+1/2)\pi - i(N+1/2)\pi$, $C:\ (N+1/2)\pi + i(N+1/2)\pi$, $D:\ -(N+1/2)\pi + i(N+1/2)\pi$ を頂点とする長方形を像とする閉曲線とし，向きは反時計回りとする．このとき，定理 6.14 の条件 (i), (ii) はみたされる．条件 (iii) を検証するために，まず，$L(C_N) = 4(2N+1)\pi$，$R_N = (N+1/2)\pi$ に注意する．さらに，$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とおくと，$y \geq \pi/2$ のとき

$$|\cot z| = \frac{|1+e^{-2iz}|}{|1-e^{-2iz}|} \leq \frac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1} = 1 + \frac{2}{e^{2y}-1} \leq 1 + \frac{2}{e^{\pi}-1}.$$

$y \leq -\pi/2$ に対しては

$$|\cot z| = \frac{|e^{2iz}+1|}{|e^{2iz}-1|} \leq \frac{e^{2|y|}+1}{e^{2|y|}-1} \leq 1 + \frac{2}{e^{\pi}-1}.$$

同様にして，$|\cot[\pm(N+1/2)\pi + iy]| \leq 1$, $y \in \mathbb{R}$ がわかる．

C_N 上では, $|1/z| \leq 1/[(N+1/2)\pi] \leq 2/\pi$．したがって, $\sup_{z \in \mathsf{R}(C_N)} |f(z)| \leq K$ (K は N によらない定数)．また

$$\lim_{N\to\infty} \frac{L(C_N)}{R_N^2} = \lim_{N\to\infty} \frac{4(2N+1)\pi}{(N+1/2)^2\pi^2} = 0$$

ゆえに，定理 6.14 の条件 (iii) もみたされる．よって

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right)$$

と展開される．ただし，$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'$ は $n=0$ を除く和を表す．この式の右辺は次のように変形される：

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n\pi} - \frac{1}{n\pi} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-(n\pi)^2}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\cot z = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2-(n\pi)^2}. \tag{6.20}$$

公式 (6.20) は，たとえば，次のような応用をもつ．関数

$$f_{\cot}(z) := \frac{1}{2z} \left(\pi \cot \pi z - \frac{1}{z} \right) \tag{6.21}$$

とおけば (6.20) は

$$f_{\cot}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2} \tag{6.22}$$

を意味する．$\cos z, \sin z$ のマクローリン展開を用いることにより，原点の近傍で

$$\begin{aligned}
f_{\cot}(z) &= \frac{1}{2z^2} \cdot \frac{\pi z \cos \pi z - \sin \pi z}{\sin \pi z} \\
&= \frac{\pi^2}{2(\pi z)^3} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right)(\pi z)^3 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)(\pi z)^5 + O((\pi z)^7)}{1 - \frac{1}{3!}(\pi z)^2 + O((\pi z)^4)} \\
&= \frac{\pi^2}{2} \cdot \left[\left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)(\pi z)^2 + O((\pi z)^4)\right] \\
&\quad \times \left[1 + \frac{1}{3!}(\pi z)^2 + O((\pi z)^4)\right] \\
&\quad ((1-\zeta)^{-1} = 1 + \zeta + O(\zeta^2),\ |\zeta| < 1 \text{ に注意}).
\end{aligned}$$

ここで，$O(z^n)$ は，原点の近傍で $|O(z^n)| \leq C|z|^n$（$C > 0$ は定数）をみたす関数を表す．最後の式を整理すれば，原点の近傍で

$$f_{\cot}(z) = -\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^4}{90} z^2 + O(z^4) \tag{6.23}$$

という展開式が得られる．したがって，f は $z = 0$ の近傍で正則である（$z = 0$ は除去可能特異点）．一方，(6.22) を用いて $f(0), f''(0)$ を計算すると（項別微分可能性は，本章の演習問題 6 の証明と同様にして証明される）

$$f(0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad f''(0) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

これと (6.23) の右辺を比較すれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \tag{6.24}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \tag{6.25}$$

という美しい和公式が得られる．これらの式は，すでに例 6.4 で導いていた．ここでは，別の証明を与えたことになる．

以下，同様にして，任意の自然数 p に対して，$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{2p} = \zeta(2p)$ を計算することが原理的に可能である．だが，この側面については，ここではこれ以上ふれないことにする．

■ **例 6.9** ■ 例 6.8 と同様にして，次の諸公式を証明することができる（演習問題 5）．

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - (n\pi)^2}, \tag{6.26}$$

$$\frac{1}{\cos z} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi}{z^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}, \tag{6.27}$$

$$\tan z = 2z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 - z^2}. \tag{6.28}$$

(6.26) から

$$f_{\mathrm{sec}}(z) := \frac{1}{2z} \left(\frac{\pi}{\sin \pi z} - \frac{1}{z} \right) \tag{6.29}$$

とすれば

$$f_{\mathrm{sec}}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}. \tag{6.30}$$

$z = 0$ の近傍で

$$f_{\mathrm{sec}}(z) = \frac{\pi^2}{12} + \frac{7}{720}\pi^4 z^2 + O(z^4)$$

が示されるので，(6.30) の右辺のテイラー展開の係数と比較することにより

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \tag{6.31}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720} \tag{6.32}$$

が得られる．

同様にして，(6.27), (6.28) からも和公式を導くことができるが，これについては省略する．読者自ら研究されたい．

6.5 任意の極分布をもつ有理型関数

有限個の点 $a_1, \cdots, a_N \in \mathbb{C}$ $(a_j \neq a_k, j \neq k)$ が任意に与えられたとき，これらを極とする有理型関数はつねに存在する．たとえば，$\gamma_n \neq 0, n = 1, \cdots, N$ を定数として

$$g(z) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\gamma_n}{z - a_n}$$

という関数を考え，f を，$a_1, \cdots, a_N$ を含む領域で正則な任意の関数とすれば，$f+g$ は $a_1, \cdots, a_N$ を極とする有理型関数である．これは，任意に与えられた有限個の点を極とする有理型関数はつねに無数に存在することを示す．では，可算無限個の点を任意に与えたとき，これらを極とする有理型関数は存在するであろうか．この問いに（然るべき条件のもとで）肯定的に答えるのが次の定理である：

【定理 6.15】（ミッターク–レフラーの定理[5)]）　複素数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で次の条件 (i), (ii) をみたすものを任意にとる：

(i) $m \neq n$ ならば $a_n \neq a_m$.

(ii)
$$0 \leq |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots \leq |a_n| \leq |a_{n+1}| \leq \cdots$$

かつ $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

さらに，各 n に対して，自然数 k_n と複素定数 $c_{n,1}, \cdots, c_{n,k_n}$ を任意に選び

$$P_n(z) := \frac{c_{n,1}}{z-a_n} + \frac{c_{n,2}}{(z-a_n)^2} + \cdots + \frac{c_{n,k_n}}{(z-a_n)^{k_n}}$$

とおく．このとき，次の条件を (f.1)〜(f.3) をみたす関数 f が存在する：

(f.1) f は $\mathbb{C}$ において有理型.

(f.2) f は $D := \mathbb{C} \setminus \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ において正則.

(f.3) 点 a_n における f の主要部は $P_n(z)$.

証明　まず，$a_1 \neq 0$ の場合を考える．$P_n(z)$ は $|z| < |a_n|$ で正則であるから

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{(n)} z^k, \quad |z| < |a_n|$$

とマクローリン展開できる．整級数の広義一様収束性により，N を十分大きくとり

$$F_n(z) := \alpha_0^{(n)} + \alpha_1^{(n)} z + \cdots + \alpha_N^{(n)} z^N$$

[5)] Magnus Gustav Mittag-Leffler (1846–1927). スウェーデンの数学者．男爵．ヴァイエルシュトラースの弟子．

とおけば，$|z| \leq |a_n|/2$ で $|P_n(z) - F_n(z)| < 1/2^n$ とできる．条件 (ii) によって，任意の $R > 0$ に対して，番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ ならば，$|a_n| \geq 2R$ が成り立つ．このとき，$R \leq |a_n|/2$, $n \geq n_0$ であるから，$|z| \leq R$ において $|P_n(z) - F_n(z)| < 1/2^n$ $(n \geq n_0)$．したがって，ヴァイエルシュトラースの M 判定法（定理 5.13）により

$$\phi(z) := \sum_{n=n_0}^{\infty} \big(P_n(z) - F_n(z)\big)$$

は $|z| \leq R$ において，絶対一様収束する．明らかに，$n \geq n_0$ に対して，$P_n(z)-F_n(z)$ は $|z| < R$ で正則であるから，$\phi(z)$ も $|z| < R$ で正則である．そこで

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \big(P_n(z) - F_n(z)\big) \tag{6.33}$$

とすれば

$$f(z) = \sum_{n=1}^{n_0-1} \big(P_n(z) - F_n(z)\big) + \phi(z), \quad |z| < R.$$

これは $|z| < R$ で有理型関数であり，$z = a_n$ $(n \leq n_0 - 1)$ に極をもち，その主要部は $P_n(z)$ である．$R > 0$ は任意であったから，(6.33) の右辺の関数項級数は $z = a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ 以外の点では収束し，$P_n(z)$ がその主要部である．ゆえに，(6.33) によって定義される関数 f が求める関数のひとつを与える．

次に $a_1 = 0$ の場合を考える．この場合は，前段の結果によって，$a_2, a_3, \cdots$ に極をもつ有理型関数 g で，$z = a_n$ での主要部が $P_n(z)$ であるものがとれる．そこで

$$f(z) := P_1(z) + g(z)$$

とすれば，これが求める関数のひとつになる．　■

!注意 6.1　点列 $\{a_n\}_n$ $(a_n \neq a_m, n \neq m)$ が極限 $a = \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{C}$ をもつ場合には，$a_n\,(n \geq 1)$ および a を含む領域 D で，$a_n\,(n \in \mathbb{N})$ を極にもつ有理型関数は存在しない．その理由は次の通りである．仮に，D 上の有理型関数 f でそのような性質をもつものがあったとすれば，$g(z) := 1/f(z)$ も D 上の有理型関数であり，各 a_n は g の零点である．すると，一致の定理により，$g(z) = 0, z \in D$．だが，これは矛盾である．

可算無限個の極 a_n $(n \in \mathbb{N})$ をもつ，$\mathbb{C}$ 上の有理型関数 f に対する表示式 (6.33) を f の**部分分数展開**という．

上の定理の証明は，定理にいう有理型関数の構成法も同時に与えているという点で有用である．

6.6　整関数の因数分解（無限乗積表示）

P を複素変数 z の n 次の多項式とすれば，系 4.25 により，0 でない定数 α と定数 $a_1, \cdots, a_n$（互いに異なるとは限らない）があって，$P(z)$ は，$P(z) = \alpha(z-a_1)\cdots(z-a_n)$ という形に表される．これは，すなわち，$P(z)$ の因数分解にほかならない．言うまでもなく P は整関数である．では，多項式ではない整関数についてはどうであろうか．この問題に関する基本的な結果のひとつを証明するのが本節の目的である．まず，準備として，可算無限個の複素数の積に関する概念を導入する．

6.6.1　無 限 乗 積

複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられたとき，最初の N 個の数の積

$$P_N := \prod_{n=1}^{N} z_n := z_1 \cdot z_2 \cdot \ \cdots \ \cdot z_N$$

を第 N 項までの**部分積**という．もし，極限 $P = \lim_{N\to\infty} P_N$ が存在し，かつ $P \neq 0$ であるならば，P を数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**無限乗積** (infinite product) とよび，このことを記号的に

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$$

と記す．この場合，「数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ の無限乗積は収束し，その値は P に等しい」という言い方もする．

定義から明かなように，数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ の無限乗積が収束する場合は，必然的に $z_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$ である．

$z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$ のうち，0 となるものが有限個である場合には，ある番号 k をとれば，$n \geq k$ のとき，$z_n \neq 0$ が成り立つ．そこで，もし，数列 $\{z_{k+\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ の無限乗積が収束するならば，数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ の無限乗積は収束し，その値は 0 に等しいと規約する．

無限乗積が収束しない場合は**発散する**という．

$z_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$ であっても，$\lim_{N\to\infty} P_N = 0$ ならば $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ の無限乗積は発散である．このようにとらえる理由については，以下の定理 6.17 を参照．

$z_n = 0$ となる n が無限個ある場合も発散である．

【命題 6.16】　$z_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$ のとき，無限乗積 $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ が収束するならば

$$\lim_{N>M;M,N\to\infty} \prod_{n=M+1}^{N} z_n = 1.$$

特に，$\lim_{n\to\infty} z_n = 1$.

証明　$P = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$ とおく．このとき，$\prod_{n=M+1}^{N} z_n = \prod_{n=1}^{N} z_n / \prod_{m=1}^{M} z_m \to P/P = 1\,(N, M \to \infty)$．したがって，$\lim_{M,N\to\infty} \prod_{n=M+1}^{N} z_n = 1$.

特に，$M = N - 1$ とすれば，$\lim_{N\to\infty} z_N = 1$. ∎

無限乗積の収束の判定については次の定理が基本的である．

【定理 6.17】　$z_n \neq 0, n \in N$ のとき，無限乗積 $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ が収束するための必要十分条件は，$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} z_n$ が収束することである．ただし，$\operatorname{Log} z_n$ は z_n の対数の主値である．

証明　**（必要性）**　$P = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$ が収束するとする．このとき，$P \neq 0$．もし，$P < 0$ ならば，z_1 を $-z_1$ で置き換えて考察すればよいから，$-\pi < \operatorname{Arg} P < \pi$ として一般性を失わない．$Q_1 := \operatorname{Log} z_1$, $Q_n := \operatorname{Log} P_n - \operatorname{Log} P_{n-1}$, $n \geq 2$ とおけば，$\sum_{n=1}^{N} Q_n = \operatorname{Log} P_N \to \operatorname{Log} P\ (N \to \infty)$．したがって，$\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ は収束する．ゆえに，特に，$\lim_{n\to\infty} Q_n = 0$．一方，$Q_n = \operatorname{Log} z_n + 2\pi i k_n$ と表される（k_n はある整数）．したがって，$n \to \infty$ のとき，$\operatorname{Log}|z_n| \to 0$ かつ $|\operatorname{Arg} z_n + 2\pi k_n| \to 0$．$|\operatorname{Arg} z_n| \leq \pi$ であるから，後者は，十分大きな n すべてに対して，$k_n = 0$ を意味する．ゆえに，ある番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ ならば，$Q_n = \operatorname{Log} z_n$．したがって，$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} z_n$ は収束する．

（十分性）　$S = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} z_n$ が収束したとしよう．指数関数の連続性により，$e^S = \lim_{N\to\infty} e^{\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log} z_n} = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} z_n$．$e^S \neq 0$ であるから，$\prod_{n=k}^{\infty} z_n$ は収束する． ∎

上の定理は，すべての z_n が 0 でない場合に関するものであったが，この制限を設けない場合は，次のようになる：

【系 6.18】 無限乗積 $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ が収束するための必要十分条件は，ある番号 n_0 があって，$z_n \neq 0, n \geq n_0$ かつ $\sum_{n=n_0}^{\infty} \operatorname{Log} z_n$ が収束することである．

証明　**（必要性）** 無限乗積 $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ が収束するとしよう．このとき，ある番号 n_0 があって，$z_n \neq 0, n \geq n_0$ かつ $\prod_{n=n_0}^{\infty} z_n$ は収束する．したがって，定理 6.17 により，$\sum_{n=n_0}^{\infty} \operatorname{Log} z_n$ は収束する．

（十分性） ある番号 n_0 があって，$z_n \neq 0, n \geq n_0$ かつ $\sum_{n=n_0}^{\infty} \operatorname{Log} z_n$ が収束するとすれば，定理 6.17 により，$\prod_{n=n_0}^{\infty} z_n$ は収束する．したがって，$\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ は収束する． ∎

この系に基づいて，次の定義を導入する．

【定義 6.19】 ある番号 n_0 があって，$\sum_{n=n_0}^{\infty} \operatorname{Log} z_n$ が絶対収束する場合 (i.e., $\sum_{n=n_0}^{\infty} |\operatorname{Log} z_n| < \infty$)，$\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ は**絶対収束**するという．

【命題 6.20】 $P = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$ が絶対収束するならば，$\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ で積をとる順序を任意に変えてできる無限乗積 $\prod_{\nu=1}^{\infty} z_{n_\nu}$（集合として $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \{z_{n_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$）も絶対収束し，その値は P に等しい．

証明　$P = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$ が絶対収束するならば，$\sum_{n=n_0}^{\infty} |\operatorname{Log} z_n| < \infty$ であるから，$\sum_{\nu=\ell}^{\infty} |\operatorname{Log} z_{n_\nu}| < \infty$（集合として $\{z_n \mid n \geq n_0\} = \{z_{n_\nu} \mid \nu \geq \ell\}$）．したがって，定理 6.17 によって，$P' = \prod_{\nu=1}^{\infty} z_{n_\nu}$ は絶対収束する．

$P = P'$ を示すために，$z_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$ として一般性を失わない．この場合，$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} z_n$ の絶対収束性により，$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} z_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{Log} z_{n_\nu}$．したがって，$e^{\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} z_n} = e^{\sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{Log} z_{n_\nu}}$．これは $P = P'$ を意味する． ∎

無限乗積 $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ が収束するならば，命題 6.16 によって $z_n \to 1\ (n \to \infty)$．したがって，$c_n = z_n - 1$ とおけば，$z_n = 1 + c_n$ かつ $c_n \to 0\ (n \to \infty)$．そこで，無限乗積を考察する場合，これを $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + c_n)$ の形で考察すると便利な場合がある．実際，次の有用な定理が成り立つ．

【定理 6.21】 複素数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，$\prod_{n=1}^{\infty}(1+c_n)$ が絶対収束することと $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ が絶対収束することは同値である．

証明　$1+c_n \neq 0\,(n \in \mathbb{N})$ の場合を考えれば十分である．このとき，$\sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{Log}\,(1+c_n)|$ が収束することと $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ が収束することが同値であることを示せばよい．$\mathrm{Log}\,(1+0)=0$ であるから

$$\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{Log}\,(1+z)}{z} = \left[\frac{d}{dz}\mathrm{Log}\,(1+z)\right]_{z=0} = 1.$$

したがって，任意の $\varepsilon \in (0,1)$ に対して，正数 $\delta > 0$ があって，$0 < |z| < \delta$ ならば

$$\left|\frac{\mathrm{Log}\,(1+z)}{z} - 1\right| < \varepsilon.$$

したがって

$$(1-\varepsilon)|z| < |\mathrm{Log}\,(1+z)| < (1+\varepsilon)|z|, \quad |z| < \delta. \tag{6.34}$$

さて，$\sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{Log}\,(1+c_n)|$ が収束するとしよう．このとき，$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$．したがって，番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ ならば $|c_n| < \delta$ が成り立つ．ゆえに，(6.34) の左側の不等式によって，$|c_n| < (1-\varepsilon)^{-1}|\mathrm{Log}\,(1+c_n)|$, $n \geq n_0$．したがって，$\sum_{n=n_0}^{\infty} |c_n|$ は収束する．

逆に $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ が収束したとすれば，$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$．したがって，番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ ならば $|c_n| < \delta$ が成り立つ．ゆえに，(6.34) の右側の不等式によって，$|\mathrm{Log}\,(1+c_n)| < (1+\varepsilon)|c_n|$, $n \geq n_0$．したがって，$\sum_{n=n_0}^{\infty} |\mathrm{Log}\,(1+c_n)|$ は収束する．■

■ 例 6.10 ■　複素数 α, λ_n は $\mathrm{Re}\,\alpha > 1$, $0 < |\lambda_n| \leq 1$ をみたすとする．このとき，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$|\lambda_n/n^{\alpha}| \leq 1/n^{\mathrm{Re}\,\alpha}$ である．したがって，$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\mathrm{Re}\,\alpha} < \infty$．ゆえに，定理 6.21 によって

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_n}{n^{\alpha}}\right)$$

は絶対収束する．

6.6.2　正則関数列の無限乗積

$\mathbb{C}$ の部分集合 D で定義された複素関数列 $\{g_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ について，各点 $z \in D$

に対して，$\prod_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ が収束するとき，$\prod_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ は D で収束するという．

【定理 6.22】　領域 D 上で正則な関数列 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ について，$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ が D の各点 z で一様収束するならば，$\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ も D において絶対収束し，D で正則である．

証明　仮定により，各点 z_0 に対して，ある近傍 $U_\delta(z_0) \subset D$ が存在して，$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in U_\delta(z_0)} |f_n(z)| = 0$．したがって，番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ ならば，$|f_n(z)| < 1, z \in U_\delta(z_0)$ が成り立つ．これから，$n \geq n_0$ ならば，$1+f_n(z) \neq 0, z \in U_\delta(z_0)$．ゆえに，定理 6.21 の証明から（不等式 (6.34) に注意），$\sum_{n=n_0}^{\infty} \mathrm{Log}\,(1+f_n(z))$ も $U_\delta(z_0)$ で一様絶対収束する．したがって，ある番号 $m_0 \geq n_0$ があって，$n \geq m_0$ ならば，$|\mathrm{Log}\,(1+f_n(z))| < \pi$ が成り立つ．これは，$|\mathrm{Arg}\,(1+f_n(z))| = |\mathrm{Im}\,\mathrm{Log}\,(1+f_n(z))| < \pi$ を意味するから，$\mathrm{Log}\,(1+f_n(z))$ $(n \geq m_0)$ は $U_\delta(z_0)$ で正則である．そこで，$\phi(z) = \sum_{n=m_0}^{\infty} \mathrm{Log}\,(1+f_n(z))$ とおけば，ϕ は $U_\delta(z_0)$ で正則である．ゆえに，$e^{\phi(z)}$ もそうである．一方，$\prod_{n=m_0}^{\infty}(1+f_n(z)) = e^{\phi(z)}$ であるから，$\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z)) = \left[\prod_{n=1}^{m_0-1}(1+f_n(z))\right] e^{\phi(z)}$．右辺は，$U_\delta(z_0)$ で正則であるから，$\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ もそうである．z_0 は D の任意の点であったから，題意がしたがう．　∎

■ 例 6.11 ■　p_n を n 番目の素数とする．すなわち，$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, \cdots$．整関数 $P_n(z)$ を

$$P_n(z) = -\frac{1}{p_n^z} = -\frac{1}{e^{z \log p_n}}$$

によって定義する．$x = \mathrm{Re}\, z \geq \sigma > 1$ ならば，$|P_n(z)| = 1/p_n^x \leq 1/p_n^\sigma$ であり，$\sum_{n=1}^{\infty} 1/p_n^\sigma < \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\sigma < \infty$ であるから，ヴァイエルシュトラースの M 判定法（定理 5.13）により，$\sum_{n=1}^{\infty} |P_n(z)|$ は領域 $\mathrm{Re}\, z > 1$ の各点で一様収束する．ゆえに定理 6.22 によって

$$\prod_{n=1}^{\infty} P_n(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^z}\right)$$

は $\mathrm{Re}\, z > 1$ で絶対収束し，$\mathrm{Re}\, z > 1$ において正則である．実は，この無限乗積の逆数はリーマンのゼータ関数（例 5.2）に等しいことが証明される：

$$\zeta(z) = \frac{1}{\prod_{p:\text{素数}} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)}, \quad \mathrm{Re}\, z > 1. \tag{6.35}$$

証明　（概略）　$z>1$ とする（一致の定理により，$z>1$ の場合について (6.35) を示せば十分）．任意の $N\in\mathbb{N}$ に対して，幾何級数展開により

$$\left[\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_n^z}\right)\right]^{-1}=\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}p_1^{-k_1z}\right)\cdots\left(\sum_{k_N=1}^{\infty}p_N^{-k_Nz}\right)$$
$$=\sum_{k_1,\cdots,k_N=0}^{\infty}\frac{1}{(p_1^{k_1}\cdots p_N^{k_N})^z}.$$

明らかに，$p_1^{k_1}\cdots p_N^{k_N}\in\mathbb{N}$ であるから，

$$\left[\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_n^z}\right)\right]^{-1}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}=\zeta(z).$$

したがって，$\left[\prod_{n=1}^{\infty}(1-1/p_n^z)\right]^{-1}\le\zeta(z)\cdots(*)$．

逆に任意の $n\ge 2$ は素因数分解定理により，$n=p_1^{k_1}\cdots p_N^{k_N}$ という形に一意的に書ける（$k_j\ge 0$; N はある自然数）．したがって，任意の $M\ge 2$ に対して

$$\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n^z}\le\sum_{k_1,\cdots,k_N=0}^{\infty}\frac{1}{(p_1^{k_1}\cdots p_N^{k_N})^z}$$

となる N が存在する．これは，任意の $L>N$ に対して

$$\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n^z}\le\sum_{k_1,\cdots,k_L=0}^{\infty}\frac{1}{(p_1^{k_1}\cdots p_L^{k_L})^z}=\left[\prod_{n=1}^{L}\left(1-\frac{1}{p_n^z}\right)\right]^{-1}$$

を意味する．そこで，$L\to\infty$ とすれば

$$\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n^z}\le\left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^z}\right)\right]^{-1}.$$

したがって，

$$\zeta(z)\le\left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^z}\right)\right]^{-1}.$$

これと $(*)$ を合わせれば，(6.35) が得られる．　■

(6.35) の右辺を**オイラー積** (Euler product) という．

公式 (6.35) はリーマンのゼータ関数が素数と深い関係を有することを示唆するものであり，実際，そうであることが確認される[6]．

---

[6] たとえば，鹿野 健 編著『リーマン予想』（日本評論社，1991）を参照．

6.6.3 整関数の因数分解定理

一般に，恒等的に零でない整関数 f が可算無限個の零点 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ をもつ場合，$a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ である．（∵ もし，そうでない場合には，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界数列であるから，ボルツァーノ–ヴァイエルシュトラースの定理（定理 2.12）により，部分列 a_{n_k} で $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \in \mathbb{C}$ が存在するものがとれる．すると，一致の定理（定理 5.24）により，$f(z) = 0, z \in \mathbb{C}$.）多項式の因数分解との形式的で素朴な類推から言えば，f は $\prod_{n=1}^{\infty}(z - a_n)$ に比例するのではないか，ということが心に浮かぶかもしれない．だが，これは不可能であることがただちにわかる．なぜなら，右辺の無限乗積は収束しないからである．（∵ もし，収束するならば，$z - a_n \to 1$ $(n \to \infty)$ でなければならない.）そこで，$z - a_n = -a_n(1 - z/a_n)$ および $z/a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ に注目し，上の無限乗積の代わりに，$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - z/a_n)$ を考え，これに適当な整関数を乗じたものが f に等しくなるかもしれないという推測をたててみる．しかし，この場合でも，$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - z/a_n)$ は収束するとは限らない．だが

$$\mathrm{Log}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) = -\frac{z}{a_n} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 - \cdots - \frac{1}{N}\left(\frac{z}{a_n}\right)^N - \cdots$$

（第 5 章問題 10-(i)）に注意をすれば，適当な N_n をとれば $\sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{Log}\,(1 - z/a_n) + z/a_n + \cdots + (1/N_n)(z/a_n)^{N_n}|$ は収束することが期待される．この場合には，無限乗積 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - z/a_n)e^{\sum_{\ell=1}^{N_n}(1/\ell)(z/a_n)^{\ell}}$ は絶対収束する．そして，これに適当な整関数を乗じたものが f に等しいであろうという推測をたてることができる．実際，この推測は正しい．まず，いまの推測の正しさを簡単な場合に証明しよう．一般的な場合については，定理 6.24 で証明する．

【定理 6.23】 整関数 f が次の条件 (i)〜(iii) をみたすとする：

(i) $f(0) \neq 0$.

(ii) f は可算無限個の 1 位の零点 $a_n (n \in \mathbb{N})$ をもち（$a_n \neq a_m, n \neq m$ とする），$\sum_{n=1}^{\infty} 1/|a_n|^2 < \infty$.

(iii)
$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{f'(z)}{zf(z)} = 0.$$

このとき

$$f(z) = f(0)e^{f'(0)z/f(0)} \prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)e^{z/a_n}\right\}. \tag{6.36}$$

証明　条件 (ii) から，$0 < |a_1| \le |a_2| \le \cdots$ として一般性を失わない ($|a_n| \to \infty$ $(n \to \infty)$).

$$f_n(z) = \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n} - 1$$

とおくと

$$f_n(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1-k)}{k!} \left(\frac{z}{a_n}\right)^k$$

であるから，$|z| \le |a_n|$ ならば，

$$|f_n(z)| \le \frac{|z|^2}{|a_n|^2} e$$

が成り立つ．したがって，条件 (ii) により，任意の N に対して，$\sum_{n=N}^{\infty} |f_n(z)|$ は $|z| < |a_N|$ で一様収束する（したがって，$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ もそうである）．ゆえに，定理 6.22 によって，$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n(z))$ は $|z| < |a_N|$ で絶対収束し，$|z| < |a_N|$ で正則である．N は任意であるから，$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n(z))$ は整関数である．そこで，(6.36) の右辺の関数を $R(z)$ とすれば，これは整関数である．ゆえに，一致の定理を応用することにより，(6.36) を示すには，原点の近傍で $f(z) = R(z)$ を示せば十分である．

もし，$f(0) < 0$ ならば，f の代わりに，$-f$ を考えることにより，$f(0) \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ としてよい．したがって，正数 $\delta \in (0, |a_1|)$ が存在して，$|z| < \delta$ ならば，$f(z) \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$．ゆえに，$L(z) := \operatorname{Log} f(z),\ z \in U_\delta(0)$ が定義される．これは，$U_\delta(0)$ 上で正則であり，合成関数の微分法により

$$L'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad z \in U_\delta(0)$$

が成り立つ．

さて，無限大に発散する，正数の狭義単調増加列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ で各円周 $|z| = r_n$ 上には f の零点がないものがとれる．そこで，$C_n(t) = r_n e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ とすれば，$0 \in (C_n)_{\text{int}}$ かつ $\mathsf{R}(C_n) \subset (C_{n+1})_{\text{int}}, n \in \mathbb{N}$ が成り立つ．また，$L(C_n) = 2\pi r_n$．$g(z) := f'(z)/f(z)$ とおこう．このとき，g は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数であり

$$g(z) = L'(z), \quad z \in U_\delta(0).$$

条件 (ii) により，g は，点 $z = a_n$ に 1 位の極をもち，その主要部は $1/(z - a_n)$ であることがわかる．($\because$ $z = a_n$ の近傍において，正則な関数 h を用いて $f(z) =$

$(z-a_n)h(z)$ $(h(a_n) \neq 0)$ と書けることに注意し，$f'(z)/f(z)$ を計算せよ．）明らかに，g は C_n 上で正則である．条件 (iii) により，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，定数 $R > 0$ があって，$|z| \geq R$ ならば，$|g(z)| \leq \varepsilon|z|$ が成り立つ．番号 n_0 を $r_n > R$, $n \geq n_0$ が成り立つようにとる．$R_n := \inf_{z \in \mathsf{R}(C_n)} |z| = r_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ であり

$$\frac{\max_{z \in \mathsf{R}(C_n)} |g(z)|}{R_n^2} L(C_n) \leq 2\pi\varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max_{z \in \mathsf{R}(C_n)} |g(z)|}{R_n^2} L(C_n) = 0.$$

以上により，関数 g は定理 6.14 の仮定をみたす．ゆえに

$$g(z) = g(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} \right).$$

$z \in U_\delta(0)$ ならば，$|z/a_n| < 1$, $n \in \mathbb{N}$．したがって，$\mathrm{Log}\,(1 - z/a_n)$ が定義され

$$\frac{d}{dz} \mathrm{Log} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) = \frac{1}{z-a_n}, \quad z \in U_\delta(0).$$

したがって

$$g(z) = g(0) + \frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\mathrm{Log} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + \frac{z}{a_n} \right].$$

これと $L(z) = L(0) + \int_0^z g(\zeta) d\zeta$ を用いると

$$L(z) = \mathrm{Log}\, f(0) + g(0)z + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\mathrm{Log} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + \frac{z}{a_n} \right], \quad z \in U_\delta(0).$$

ゆえに

$$f(z) = e^{L(z)} = f(0) e^{f'(0)z/f(0)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n}, \quad z \in U_\delta(0).$$

よって (6.36) がしたがう．■

!注意 6.2　この定理は，上述の推測で $N_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$ ととれる場合である．その代わり，$\sum_{n=1}^{\infty} 1/|a_n|^2 < \infty$ という条件がついてしまう．

定理 6.23 は，**整関数の因数分解定理**のひとつである．(6.36) 型の表式は**無限乗積表示**とよばれる．

■ **例 6.12** ■　関数 $f(z) = \sin z/z$ は整関数である（$z = 0$ は除去可能特異点）．そ

の零点は $z=\pm n\pi, n\in\mathbb{N}$ であり，すべて 1 位である．$f(0)=1$, $f'(0)=0$ であり，また

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\cot z-\frac{1}{z}$$

であるので，定理 6.23 の条件 (iii) もみたされることがわかる．したがって

$$\frac{\sin z}{z}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \tag{6.37}$$

が得られる．

この表示式の応用として，たとえば，$z=\pi/2$ を代入すれば

$$\frac{2}{\pi}=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)(2k+1)}{2^2k^2}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2(2n+1)$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{n}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2.$$

これから**ウォリスの公式**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}=\sqrt{\pi} \tag{6.38}$$

を得る[7]．

■ **例 6.13** ■　前例と同様にして，次の公式を証明することができる（演習問題 8）：

$$\cos z=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right]. \tag{6.39}$$

整関数の因数分解定理に関する一般的定理として次の定理がある：

【定理 6.24】（ヴァイエルシュトラースの因数分解定理）　f を整関数とし，その 0 以外の零点を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ とし $(a_n\neq a_m, n\neq m)$，各零点 a_n の位数を k_n とする．このとき，整関数 $g(z)$ と自然数列 $\{N_n\}_{n=1}^{\infty}$ があって

$$f(z)=z^k e^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{k_n}e^{k_n\sum_{\ell=1}^{N_n}\frac{1}{\ell}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{\ell}} \tag{6.40}$$

と表される．ただし，k は非負整数である[8]．

---

[7] John Wallis (1616–1703). イギリスの数学者，物理学者，神学者．無限の記号 ∞ を初めて用いたとされる．

[8] f が原点を零点としてもたないときは，$k=0$ と読む．

証明　**（概略）**　まず，$f(0) \neq 0$ の場合を考える．定理 6.23 の証明の場合と同様に，$f(0) \notin (-\infty, 0]$ として一般性を失わない．$z = a_n$ の近傍で $f(z) = (z - a_n)^{k_n} h(z)$ と書ける．ただし，$k_n \in \mathbb{N}$，h は正則で $h(a_n) \neq 0$．これから，$f'(z)/f(z) = k_n/(z - a_n) + h'(z)/h(z)$．したがって，有理型関数 f'/f の点 $z = a_n$ における主要部は $k_n/(z - a_n)$ である．ゆえに，ミッタークーレフラーの定理（定理 6.15）の証明により，各 n に対し

$$F_n^N(z) := -\frac{k_n}{a_n} \sum_{\ell=0}^{N} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{\ell}$$

── $k_n/(z - a_n)$ の原点におけるマクローリン展開の第 N 部分和 ── とおけば，ある番号 N_n が存在して

$$\Phi(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k_n}{z - a_n} - F_n^{N_n - 1}(z) \right)$$

は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数であり，その極の全体は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ であり，$z = a_n$ における Φ の主要部は f'/f のそれに等しい．したがって

$$\psi(z) := \frac{f'(z)}{f(z)} - \Phi(z)$$

とおけば，これは，整関数である．そこで，$E(z) := \int_0^z \psi(\zeta) d\zeta$ とおけば，原点の十分小さい近傍において

$$\begin{aligned} E(z) &= \operatorname{Log} f(z) - \operatorname{Log} f(0) - \int_0^z \Phi(\zeta) d\zeta \\ &= \operatorname{Log} f(z) - \operatorname{Log} f(0) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{Log} \left(1 - \frac{z}{a_n} \right)^{k_n} + \sum_{\ell=0}^{N_n - 1} \frac{k_n}{\ell + 1} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{\ell+1} \right). \end{aligned}$$

そこで，$g(z) := E(z) + \operatorname{Log} f(0)$ とおけば (6.40) が得られる．こうして，(6.40) は，まず，原点の十分小さい近傍で成立することがわかる．だが，(6.40) の右辺が整関数であることは，定理 6.23 の証明の対応する部分と同様な仕方で示すことができる．したがって，一致の定理（定理 5.24）により，$\mathbb{C}$ 全体で (6.40) が成立することになる．

$z = 0$ が f の零点のときは，その位数を k とすれば，$f(z) = z^k q(z)$ と書け，$q(z)$ は 0 には零点をもたない整関数であり，その零点集合は，f の零点集合から

0 を除いたものに等しい．したがって，$q(z)$ に対して，前半の結果を適用することにより，(6.40) が得られる． ∎

演習問題

1. k, m を自然数とし，複素関数 $f(z) = z^m e^{1/z^k}$ を考える．

(i) $z = 0$ は f の真性特異点であることを示せ．

(ii) 原点を反時計回りに回る任意の連続微分可能な単純閉曲線を C とするとき，$\displaystyle\int_C f(z)dz$ を求めよ．

2. $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を定数とする．$z = 0$ は，次にあげる関数の除去可能特異点であることを示せ．

(i) $\dfrac{e^{\beta z} - 1}{z}$.

(ii) $\dfrac{\sinh \beta z}{z}$.

(iii) $\dfrac{1 - \cosh \beta z}{z^2}$.

3. $\mathbb{C} \setminus ([1, \infty) \cup \{0\})$ 上で定義された関数 $\dfrac{\log(1 - z)}{z}$ に対して，$z = 0$ はその除去可能特異点であることを示せ．

4. $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とし，z の関数 a^z, b^z は主値で考える（第 1 章，1.8.6 項を参照）とする．関数 $(a^z - b^z)/z$ に対して，$z = 0$ は除去可能特異点であることを示せ．

5. 部分分数展開式 (6.26)〜(6.28) を証明せよ．

6. $\displaystyle\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}$ を証明せよ．

7. 次の諸式を証明せよ．

$$\frac{1}{\sinh z} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 + (n\pi)^2}.$$

$$\frac{1}{\cosh z} = -2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1/2)\pi}{z^2+(n+1/2)^2\pi^2}.$$

$$\tanh z = 2z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^2+(n+1/2)^2\pi^2}.$$

$$\coth z = \frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2+(n\pi)^2}.$$

8. $\cos z$ の因数分解式 (6.39) を証明せよ．

7

解析接続と解析関数

「あなた方は、どちらへいらっしゃるんですか。」
「どこまでも行くんです。」

—宮沢賢治「銀河鉄道の夜」より

7.1　直接接続と間接接続

解析接続の基本的な考え方については，シュヴァルツの鏡像原理（第 4 章，4.10 節）を論述した際にすでに若干ふれた．この章では，解析接続の概念をもう少し詳しく見ていく．

解析接続の問題とは，要するに，正則関数の定義域を，関数の正則性を保ちつつ，拡大する問題である．基本的な考え方は次の通りである．D_1, D_2 を $\mathbb{C}$ の領域で互いに素でないものとする：$D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$．$f_1, f_2$ をそれぞれ，D_1, D_2 上の正則関数とし，$D_1 \cap D_2$ 上では f_1 と f_2 は一致するとする．すなわち，任意の $z \in D_1 \cap D_2$ に対して，$f_1(z) = f_2(z)$ が成り立つとする．このとき，$D := D_1 \cup D_2$ 上の関数 f を

$$f(z) := \begin{cases} f_1(z) & ;\ z \in D_1 \\ f_2(z) & ;\ z \in D_2 \end{cases}$$

によって定義すれば，f は D 上で正則である．この手続きは次のように読める．すなわち，関数 f_1 または f_2 は，より広い定義域をもつ正則関数に拡大され，f_1 は f_2 へ，f_2 は f_1 へと "連なる"．この意味で，f_1, f_2 は互いに他の**解析接続** (analytic continuation) であるという．

与えられた正則関数の解析接続を見出す方法のうち，最も基本的なのは冪級数展開を用いる方法である．すでに知っているように，ある領域 D で定義された正則関数は，D の任意の点 a のまわりにテイラー展開でき，点 a を変えることによ

り，正則関数の値は冪級数を通じてすべて復元できる．ゆえに，正則関数というのは，冪級数で表される正則関数たちの集まりの全体によって定義されるとみることが可能である．この観点に立って解析接続を考えるのである．以下で見るように，解析接続にとって，一致の定理（定理 5.24，系 5.25，定理 6.8）が鍵となる性質である．

いま，点 $a \in \mathbb{C}$ を中心とする冪級数

$$P(z,a) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

を考える ($a_n \in \mathbb{C}, n \geq 0$)．この級数の収束半径を $\rho(a)$ とするとき，$\rho(a) > 0$ であるならば，$P(z,a)$ を点 a を中心とする**関数要素**とよぶ．これは開円盤

$$D_a := U_{\rho(a)}(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < \rho(a)\}$$

で正則である．したがって，$P(z,a)$ は D_a の中の任意の 1 点 $b \in D_a$ のまわりにテイラー展開できる．これを

$$P(z,b) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n$$

とする．ただし，$b_n := P^{(n)}(b,a)/n!$．

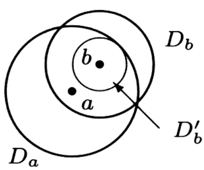


図 7.1　D_a, D_b, D'_b

$b \in D_a$ であるから，$|b-a| < \rho(a)$ である．したがって

$$D'_b := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-b| < \rho(a) - |a-b|\}$$

とすれば，$D'_b \neq \emptyset$ かつ $D'_b \subset D_a$．したがって，$P(z,a)$ は D'_b で正則であるから，$P(z,b)$ の収束半径 $\rho(b)$ について

$$\rho(b) \geq \rho(a) - |a-b| > 0$$

が成り立つ．ゆえに，$D_b' \subset D_a \cap D_b$ であるから，$D_a \cap D_b \neq \emptyset$ かつ

$$P(z,a) = P(z,b), \quad z \in D_b' \subset D_a \cap D_b.$$

したがって，一致の定理（系 5.25）によって

$$P(z,a) = P(z,b), \quad z \in D_a \cap D_b.$$

これは，$P(z,b)$ が $P(z,a)$ の解析接続であることを意味する．こうして，$P(z,a)$ は $D_a \cup D_b$ 上の正則関数に拡張される．もちろん，この拡張は $D_b \not\subset D_a$ の場合にのみ実質的な意味をもつ．

関数 $P(z,b)$ の型の関数要素，すなわち，D_a 内に中心をもつ関数要素を $P(z,a)$ の**直接接続**という．

関数要素 $P(z,a)$ から有限回の直接接続によって得られる関数要素を $P(z,a)$ の**間接接続**とよぶ．

■ **例 7.1** ■　$c \neq 0$ を定数とするとき，関数 $f(z) = 1/(z-c)$ は $\mathbb{C} \setminus \{c\}$ で正則であり，点 $c \in \mathbb{C}$ に 1 位の極をもつ．この関数を解析接続の観点から考察してみよう．$f(z) = -\dfrac{1}{c(1-\frac{z}{c})}$ と変形し，幾何級数展開を応用することにより，f の原点におけるテイラー展開は

$$f_1(z) := -\frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{c^n}, \quad |z| < |c|$$

で与えられることがわかる．級数 f_1 の収束半径は $|c|$ であり，$D_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < |c|\}$ とすれば，D_1 上で $f_1(z) = f(z)$ である．したがって，f_1 が最初に与えられたとすれば，f は f_1 の解析接続である．

次に D_1 内の任意の点 a $(|a| < |c|)$ のまわりに f をテイラー展開するために，

$$f(z) = -\frac{1}{c-a}\frac{1}{\left(1-\frac{z-a}{c-a}\right)}$$

と変形し，幾何級数展開を利用すれば

$$f_2(z) := -\frac{1}{c-a}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(c-a)^n}, \quad z \in D_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < |c-a|\}$$

を得る．この級数の収束半径は $|c-a|$ である．たとえば，$a = -tc, 0 < t < 1$ ならば，$|c-a| = (1+t)|c| > |c|$ であるから，級数 f_2 の収束半径は級数 f_1 の収束半径よりも大きい．したがって，この場合，D_2 は D_1 以外の点も含む．$D_1 \cap D_2$ 上では

$f_1 = f_2$ であるので，f_2 は f_1 の解析接続である．以下，この手続きを繰り返し行うことにより，f_1 をより広い領域に解析接続することができ，最終的に，$\mathbb{C} \setminus \{c\}$ 上の正則関数へと解析接続され，それは f に一致することが示される．こうして，$\mathbb{C} \setminus \{c\}$ 上の正則関数 $1/(z-c)$ は，いま述べたような解析接続を通して定義される関数とみることも可能である．

この例では，解析接続で得られる関数の形が陽にわかっていたから解析接続の様子が具体的にわかった．だが，具体的な問題において，つねにこのような場合だけが現れるとは限らない．

例 7.1 から示唆されるように，解析接続は複素平面全体にわたってできるとは限らず，解析接続によって得られる関数は，一般には特異点をもつ．

! 注意 7.1　有理型関数は，極を除いて正則であるから，極を除いた領域上での正則関数として，解析接続を行うことができる．

7.2　曲線に沿う解析接続

C を複素平面上の連続曲線で始点が a，終点が b であるものとし，点 a において関数要素 $P(z,a)$ が与えられているとする．C 上に次の性質をみたす有限個の点 $a = a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n = b$ と関数要素 $P_C(z,a_j)$ $(j = 1, \cdots, n)$ が存在するとき，$P(z,a)$ は**曲線 C に沿って解析接続可能**であるといい，$P_C(z,b)$ を**曲線 C に沿う，$P(z,a)$ の解析接続**という：

(i) 各 $j = 0, \cdots, n-1$ に対して，$P_C(z,a_{j+1})$ は $P_C(z,a_j)$ の直接接続である $(P_C(z,a_0) := P(z,a))$．

(ii) 弧 $\widehat{a_j a}_{j+1}$ は $P_C(z,a_j)$ の収束円の内部 D_{a_j} に含まれる．

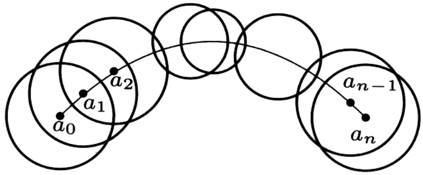


図 7.2　曲線に沿う解析接続

一般に，曲線に沿う解析接続を**曲線接続**とよぶ．

次の命題は，曲線接続の基本的性質である：

【命題 7.1】 関数要素 $P(z,a)$ は曲線 C に沿って解析接続可能であると仮定する．

(i) （**解析接続の一意性**）$P_C(z,b)$ は中間の点 $a_1,\cdots,a_{n-1}$ の取り方によらずに一意的に定まる．

(ii) $D=\bigcup_{j=0}^{n} D_{a_j}$ とし，C' を始点が a，終点が b の区分的に連続微分可能な曲線で $\mathsf{R}(C')\subset D$ をみたすものとすれば，$P(z,a)$ は C' に沿っても解析接続可能であり，かつ $P_{C'}(z,b)=P_C(z,b)$ が成り立つ．

証明 (i) $a_1,\cdots,a_{n-1}$ とは別に C 上の点 $a=b_0,\cdots,b_{m-1},b_m=b$ と関数要素 $Q(z,b_k)$ $(k=0,\cdots,m\ ;\ Q(z,b_0):=P(z,a))$ があって，各 $k=0,\cdots,m-1$ に対して，$Q(z,b_{k+1})$ は $Q(z,b_k)$ の直接接続であり，弧 $\overset{\frown}{b_k b_{k+1}}$ は $Q(z,b_k)$ の収束円の内部 D_{b_k} に含まれるとする．$D=\bigcup_{j=0}^{n} D_{a_j}, D'=\bigcup_{k=0}^{m} D_{b_k}$ としよう．このとき，D,D' は，いずれも，$\mathsf{R}(C)$ を含む領域である．7.1 節のはじめに述べた方法により，D 上の正則関数 F で $z\in D_{a_j}$ ならば，$F(z)=P_C(z,a_j)$ をみたすものが存在する．同様に，D' 上の正則関数 G で $z\in D_{b_k}$ ならば，$G(z)=Q(z,b_k)$ をみたすものが存在する．明らかに，$D_{a_0}=D_{b_0}$ 上で $F(z)=G(z)$．したがって，一致の定理により，$F(z)=G(z),\ z\in D\cap D'$．$D_b\subset D\cap D'$ であるから，$P_C(z,b)=Q(z,b)$．

(ii) D の境界 ∂D と $\mathsf{R}(C')$ との距離を d (>0) (i.e., $d:=\inf_{z\in\mathsf{R}(C'),w\in\partial D}|z-w|$) とする．いま，$C'$ の長さは有限であるから，C' 上に点 $a'_0=a,a'_1,\cdots,a'_{m-1},a'_m=b$ を各部分弧 $\overset{\frown}{a'_j a'_{j+1}}$ の長さが d より小さくなるようにとれる．(i) で定義した，D 上の正則関数 F を各点 a'_j でテイラー展開したものを $P(z,a'_j)$ $(j=0,\cdots,m)$ とすれば，その収束半径はすべて d 以上であり，したがって，$\overset{\frown}{a'_j a'_{j+1}}$ は $D_{a'_j}$ に含まれるから，$P(z,a'_{j+1})$ は $P(z,a'_j)$ の直接接続である．ゆえに，$P(z,a)$ は C' に沿って解析接続可能である．$P_{C'}(z,b)=P_C(z,b)$ は明らかであろう． ∎

【命題 7.2】 関数要素 $P(z,b)$ が関数要素 $P(z,a)$ の間接接続であるための必要十分条件は，連続曲線 C で始点が a, 終点が b となるものがあって，$P(z,b)$ が，$P(z,a)$ の，曲線 C に沿う解析接続になっていることである．

証明　**(必要性)**　関数要素 $P(z,b)$ が関数要素 $P(z,a)$ の間接接続であるとしよう．このとき，有限個の点 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ $(a_0 = a, a_n = b, a_k \neq a_j, k \neq j)$ と関数要素 $P(z,a_k)$ で，$P(z,a_k)$ が $P(z,a_{k-1})$ $(k = 1,\cdots,n)$ の直接接続になっているものがとれる．そこで，a_0 を始点，a_n を終点とする折れ線曲線：$a_0 \to a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_n$ を C とすれば，$P(z,b)$ は，$P(z,a)$ の曲線 C に沿う解析接続により得られる．

(十分性)　これは，曲線に沿う解析接続の定義から明らか．　∎

この命題に基づいて，間接接続または曲線に沿う解析接続を単に**解析接続**とよぶ．

【命題 7.3】　D を $\mathbb{C}$ の領域とし，f を D 上の正則関数とする．任意の点 $a \in D$ における f のテイラー展開を $P_f(z,a)$ と書く：$P_f(z,a) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)(z-a)^n/n!$.

(i) 任意の点 $a, b \in D$ に対して，$P_f(z,b)$ は $P_f(z,a)$ の解析接続である．

(ii) 関数要素 $P_f(z,a)$ は，a を始点とする，D 内の任意の曲線 C に沿って解析接続可能である．この場合，C の終点を b とすれば，解析接続の点 b での関数要素は $P_f(z,b)$ に等しい．

証明　(i) $P_f(z,a)$ の収束半径を $\rho(a)$ とする．2 つの場合に分けて考える．

(A) $D_{a,b} := U_{\rho(a)}(a) \cap U_{\rho(b)}(b) \cap D \neq \emptyset$ の場合．この場合は，任意の $z \in D_{a,b}$ に対して，$P_f(z,a) = f(z) = P_f(z,b)$．したがって，$P_f(z,b)$ は $P_f(z,a)$ の解析接続である．

(B) $D_{a,b} = \emptyset$ の場合．この場合は，D の連結性により，a を始点，b を終点とする折れ線曲線 C $(\mathsf{R}(C) \subset D)$ で，次の性質をもつものがとれる：この折れ線の頂点を $a = a_0, a_1, \cdots, a_n = b$ とすれば，$U_{\rho(a_{j+1})}(a_{j+1}) \cap U_{\rho(a_j)}(a_j) \cap D \neq \emptyset$, $j = 0,\cdots,n-1$．したがって，(i) により，$j = 0,\cdots,n-1$ に対して，$P_f(z,a_{j+1})$ は $P_f(z,a_j)$ の解析接続である．ゆえに，題意が成立する．

(ii) 命題 7.1-(ii) によって，C は折れ線曲線として，一般性を失わないから，(i) の証明により，題意が成立する．　∎

7.3 パンルヴェの定理

応用上有用な解析接続の原理を述べる．D_1, D_2 を複素平面 $\mathbb{C}$ の 2 つの領域とし，それらの境界はひとつの連続微分可能な単純曲線（ジョルダン曲線）γ を共有するとする．γ の像を Γ とする．ただし，γ が閉曲線でないときは，その像の両端を除いたものを改めて Γ とする．$D := D_1 \cup D_2 \cup \Gamma$ は領域であるとする．f_1, f_2 はそれぞれ，D_1, D_2 で正則な関数であるとする．もし，領域 $D = D_1 \cup D_2 \cup \Gamma$ で正則な関数 F が存在して

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z) & ; \ z \in D_1 \\ f_2(z) & ; \ z \in D_2 \end{cases}$$

が成り立つならば，**f_1 は Γ を越えて D_2 へ解析接続される**，あるいは **f_2 は Γ を越えて D_1 へ解析接続される**という．この場合，明らかに，f_1, f_2 は Γ 上で連続な境界値をもち，かつ相等しい．このような解析接続に関する基本的な定理として次の定理 —— シュヴァルツの鏡像原理の一般化 —— がある．

【定理 7.4】(パンルヴェの定理[1])　D_1, D_2, γ, Γ を上述のものとし，f_j $(j = 1, 2)$ は $D_j \cup \Gamma$ 上で定義された関数で，次の性質をみたすとする：

(i) f_j $(j = 1, 2)$ は D_j で正則かつ $D_j \cup \Gamma$ で連続．

(ii) $f_1(\zeta) = f_2(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$.

このとき，f_1 (f_2) は Γ を越えて D_2 (D_1) へ解析接続される[2]．

証明　関数 $F(z)$ を $z \in D_j$ $(j = 1, 2)$ ならば $F(z) := f_j(z)$, $\zeta \in \Gamma$ ならば，$F(\zeta) := f_1(\zeta)(= f_2(\zeta))$ によって定義する．このとき，$D = D_1 \cup \Gamma \cup D_2$ とすれば，F は D 上で連続である．したがって，D 内の任意の区分的に連続微分可能な単純閉曲線 C に対して，$\int_C F(z)dz = 0 \cdots (*)$ を示すことができれば，モレラの定理（定理 4.21）により F は D 上で正則であることがわかる．このとき，題意がしたがうことは明らかであろう．ところで，$(*)$ の証明は，シュヴァルツの鏡像原理（定理 4.29）の証明と同様にできるので省略する[3]．　∎

---

[1] Paul Painlevé (1863–1933)．フランスの数学者，政治家．彼の名を冠した微分方程式がある．

[2] 括弧には括弧を対応させて読む．

[3] 詳しくは，たとえば，辻 正次『複素函数論』（槇書店，1968）の第 8 章，4 節，定理 VIII.3 の証明や楠 幸男『解析函数論』（廣川書店，1962）の §34，定理 34.2 の証明を参照．

■ **例 7.2** ■　すでに知っているように，対数関数の主値 $\operatorname{Log} z$ は $D_0 = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid -\pi < \arg z \leq \pi\}$ で定義され，$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ で正則である．（しかし，負の実軸 $(-\infty, 0)$ 上では不連続であることに注意.）$x < 0$ に対して，$\operatorname{Log} x = \log|x| + i\pi$ である．1.9.1 項の記号を用いると，領域 $\Pi_2 = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \pi < \arg z < 3\pi\}$ 上で対数関数 $\log_{2\pi} z$ は正則であり，$x < 0$ に対して，

$$\lim_{\operatorname{Im} z<0, z\to x} \log_{2\pi} z = \log|x| + i\pi = \operatorname{Log} x.$$

ゆえに，パンルヴェの定理により，$\operatorname{Log} z$ は負の実軸 $(-\infty, 0)$ を越えて，$\log_{2\pi} z$ へと解析接続される．同様に，$\log_{2\pi} z$ は負の実軸を超えて，$\log_{4\pi} z$ へと解析接続される．以下，同様に，順次，$\log_{2n\pi} z$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ へと解析接続される．一方，$\operatorname{Log} z$ を $\arg z = -\pi$ から上半平面へと "逆向きに" 解析接続すれば，$\log_{2n\pi} z$ $(n = -1, -2, -3, \cdots)$ が得られる．こうして，$\operatorname{Log} z$ を解析接続することにより，対数関数の枝のすべてが得られる．

実は，この例において，解析接続の本質がいかんなく現れている．というのは，この例は，解析接続の全体に関して，次に述べる意味での 2 つの観点が可能であるということを示唆するからである．そのひとつは，$\operatorname{Log} z$ の解析接続によって，対数関数のリーマン面（1.9.1 項を参照）$\mathbb{D}$ 上の関数が得られたとみる観点である．この場合，その関数は，$\mathbb{D}$ 上の 1 価正則関数としての対数関数 $\log z$ に等しいことがわかる．

もうひとつの観点は，リーマン面という概念を用いない観点である．この場合には，集合 $\Pi_{2n} \setminus (-\infty, 0]$ $(n \in \mathbb{Z})$ を単に同一の部分集合 Π_0 とみるので，$\operatorname{Log} z$ の任意の関数要素 $P(z, a)$ $(a \in \Pi_0)$ を任意の点 $b \neq 0$ まで解析接続したときに，この点での関数要素 $P(z, b)$ は可算無限個存在することになる．たとえば，a を始点とし，$\operatorname{Im} b < 0$, $\operatorname{Re} b < 0$ をみたす点 b を終点とする曲線で原点を反時計回り（時計回り）に回るものについて解析接続すれば，順次，$\log_{2\pi n} z$ $(\log_{-2\pi n} z)$ $(n \in \mathbb{N})$ の点 b における関数要素が得られる[4)]．したがって，解析接続により，無限多価関数が得られたことになる（本章演習問題 1 を参照）．これが無限多価関数としての $\log z$ である．

■ **例 7.3** ■　$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ に対して，$\text{p.v.}\, z^{1/n} = e^{(\operatorname{Log} z)/n}$ であるから，例 7.2 の結果を使えば，$\text{p.v.}\, z^{1/n}$ の解析接続により，n 価関数としての $z^{1/n}$ が得られる．

ここで，実軸の開区間で定義された関数の解析接続の概念を定義しておこう．

f を開区間 J（無限開区間，半無限開区間でもよい）で定義された連続関数とする．J を境界の一部として含む開集合 $D \subset \mathbb{C}$ と D 上の正則関数 F があって，

---

4) 括弧には括弧を対応させて読む．

任意の $x \in J$ に対して，$\lim_{z\in D, z\to x} F(z) = f(x)$ が成り立つとき，F を f の D への**解析接続**という．

■ **例 7.4** ■ 定理 7.4 において，$\Gamma = J$ の場合を考え，$f(x) = f_1(x) = f_2(x), x \in J$ とすれば，f は $D_1 \cup D_2$ へと解析接続される．他の例については，本章の演習問題 4, 5 を参照．

7.4 解 析 関 数

1 つの関数要素 $P(z,a)$ が与えられたとしよう．このとき，a を出発点とする，$P(z,a)$ の曲線接続によって得られるすべての関数要素の全体を $\boldsymbol{P(z,a)}$ **によって定められる解析関数**という．これは，すなわち，$P(z,a)$ と曲線接続をもつすべての関数要素の集合である[5]．解析接続の性質から，解析関数は，それに属する関数要素の取り方には無関係に一意的に定まる．$P(z,a)$ によって定められる解析関数を $\mathbf{f}$ とすれば，各点 $\zeta \in \mathbb{C}$ に対して，ζ を中心とする関数要素で $P(z,a)$ の曲線接続となっているものの集合

$$\mathbf{f}(\zeta) := \{P(z,\zeta) \mid P(z,\zeta) \text{ は } P(z,a) \text{ の曲線接続}\}$$

が同伴する．ただし，$P(z,a)$ の曲線接続である関数要素が点 ζ に存在しないならば，$\mathbf{f}(\zeta) = \emptyset$ と規約する．すると，解析関数 $\mathbf{f}$ というのは，各 $\zeta \in \mathbb{C}$ に集合 $\mathbf{f}(\zeta)$ を対応させる集合値関数とみなせる．

複素平面上のどの点 ζ においても，それを中心とする関数要素が高々 n 個，すなわち，$\#\mathbf{f}(\zeta) \le n$ であり[6]，かつ n 個の関数要素をもつ中心点が少なくとも 1 つ存在するとき（つまり，ある $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ に対して，$\#\mathbf{f}(\zeta_0) = n$），その解析関数は $\boldsymbol{n}$ **価**であるという．

1 価でない解析関数を総称的に**多価解析関数** (multi-valued analytic function) とよぶ．

解析関数の，1 点における関数要素の個数は，実は，高々可算無限個であることがわかる．すなわち，次の定理が成り立つ：

---

5) 解析 "関数" という名称がついているが，これは通常の意味での関数ではないことに注意．

6) 一般に，集合 S の濃度を $\#S$ で表す．なお，$\#\emptyset := 0$．

【定理 7.5】(ポアンカレ–ヴォルテラの定理[7])　任意の解析関数 $\mathbf{f}$ と任意の点 $\zeta \in \mathbb{C}$ に対して，$\#\mathbf{f}(\zeta)$ は高々可算無限である．

証明　$\mathbf{f}$ は関数要素 $P(z,a)$ によって定められるとする．任意の点 b を中心とする，$\mathbf{f}$ に属する関数要素を $Q(z,b)$ としよう．これは，a を始点，b を終点とする1つの曲線 C に沿う $P(z,a)$ の解析接続によって得られる．いま，C' を C に十分近い折れ線曲線とすれば，命題 7.1-(ii) によって，$Q(z,b)$ は，C' に沿う $P(z,a)$ の解析接続でもある．折れ線 C' として，その頂点 $a, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, b$ が有理点であるようにとることができる．したがって，各 $Q(z,b)$ に対して，有理点の1つの組 $(a_1, \cdots, a_{n-1})$ を対応させることができる．この場合，解析接続の一意性により，相異なる2つの関数要素 $Q_1(z,b), Q_2(z,b)$ に同一の有理点の組が対応することはない．したがって，点 b における関数要素の集合 $\mathbf{f}(b)$ から有理点の組への対応は1対1である．ところで有理点の組の全体は可算無限であるから，$\#\mathbf{f}(b)$ は高々可算無限である．　■

上で導入された解析関数の概念は，ある関数要素を無制限に解析接続して得られる関数要素の全体として定義された．だが，解析接続の定義域を制限することにより，次に述べるように，もう少し狭い意味での解析関数の概念を定義することも可能である．

D を領域とし，D 内の1点 a を中心とする関数要素が存在するとし，その1つを $P(z,a)$ とする．このとき，$P(z,a)$ を D 内のあらゆる曲線に沿って解析接続することによって得られる関数要素の全体を **$P(z,a)$ が D で定める（または定義する）解析関数**という．

$P(z,a)$ が定める解析関数を $\mathbf{f}$ とするとき，$P(z,a)$ が D で定める解析関数を $\mathbf{f}$ の1つの**枝** (branch) とよぶ．

■ **例 7.5** ■　対数関数の主値 $\mathrm{Log}\, z$ を無制限に解析接続することによって得られる解析関数が $\log z$ である（例 7.2 を参照）．

■ **例 7.6** ■　n を2以上の自然数とするとき，p.v.$z^{1/n}$ を無制限に解析接続することによって得られる解析関数が $z^{1/n}$ である（例 7.3 を参照）．

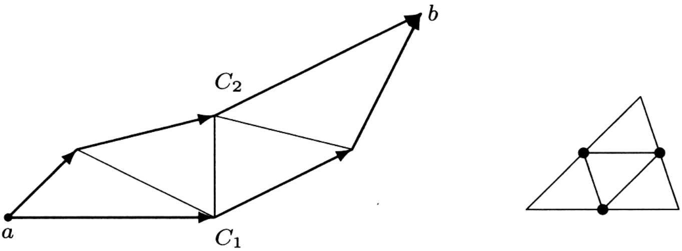
---

[7] Henri（アンリ）Poincaré (1854-1921)．フランスの傑出した数学者，数理物理学者．Vito Voltera (1860–1940) はイタリアの数学者，数理物理学者．特に，積分方程式の理論で著名．

次の定理は解析関数の 1 価性に関する重要な定理である．

【定理 7.6】（1 価性の定理 (monodromy theorem)） D は単連結領域であるとする．D の点 $a \in D$ を中心とする関数要素 $P(z,a)$ が，a を始点とする D 内のすべての曲線に沿って解析接続可能であるとする．このとき，$P(z,a)$ の解析接続が D で定める解析関数 $\mathbf{f}$ は 1 価である．

証明　仮に，考察下の解析関数が 1 価でないとして，矛盾を導こう．この場合，少なくとも 1 つの点 $b \in D$ があって，$\#\mathbf{f}(b) \geq 2$ である．そこで，$Q_1(z,b), Q_2(z,b)$ を $\mathbf{f}(b)$ の要素で相異なるものとする．$Q_j(z,b)$ $(j=1,2)$ は曲線 C_j に沿う $P(z,a)$ の解析接続によって得られるものとしよう．仮定（$P(z,a)$ は，a を始点とする D 内のすべての曲線に沿って解析接続可能）により，$P(z,a)$ は閉曲線 $C_1 \cdot (-C_2)$ に沿っても解析接続可能であるが，この曲線接続で点 a に戻ったときに得られる関数要素は元の関数要素 $P(z,a)$ に等しくない．（もし，それが $P(z,a)$ に等しいとすると，$P(z,a)$ を C_2 に沿って解析接続したものは $Q_1(z,b)$ となり矛盾する．）



折れ線の 3 角形分割　　　　$\triangle_0$ の分割

図 7.3　3 角形分割

命題 7.1-(ii) によって，$C_1 \cdot (-C_2)$ は折れ線曲線と仮定しても一般性を失わない．この折れ線曲線の頂点を結べば，$C_1 \cdot (-C_2)$ の内部は 3 角形に分割され，各 3 角形の周および内部は D に含まれる（ここに D の単連結性がきく）．すると，これらの 3 角形の少なくとも 1 つ —— $\triangle_0$ としよう —— は次の性質をもたなければならない：$\triangle_0$ の 1 つの頂点における関数要素を $\triangle_0$ の周に沿って解析接続するとき，一周しても元の関数要素は得られない．そこで，3 角形 $\triangle_0$ の各辺の中点を線分で結んで 4 つの合同な 3 角形をつくる（図 7.3 における右の図を参照）．

この分割を仮に中線分割とよぶ．このとき，この 4 つの 3 角形の少なくとも 1 つ ── $\triangle_1$ としよう ── に関しては，その周に沿って関数要素を解析接続するとき，一周しても元に戻らない．今度は，$\triangle_1$ に対して，中線分割を行うことにより，3 角形 $\triangle_2 \subset \triangle_1$ で，その周に沿って関数要素を解析接続するとき，一周しても元に戻らないものがとれる．以下，逐次，同様の手続きを繰り返すことにより，3 角形の列 $\{\triangle_n\}_{n=0}^{\infty}$ で次の性質をもつものがとれる：(i) 各 $n \geq 0$ に対して，$\triangle_{n+1}$ は $\triangle_n$ の中線分割の 1 つであり，$\bar{\triangle}_{n+1} \subset \bar{\triangle}_n$；(ii) 各 3 角形 $\triangle_n$ の周に沿って関数要素を解析接続するとき，一周しても元に戻らない（つまり，**f** は $\triangle_n$ 上で多価）．

$\triangle_0$ の周の長さを L とすれば，$\triangle_n$ の周の長さは $L/2^n$ である．したがって，$\bigcap_{n=0}^{\infty} \bar{\triangle}_n$ はただ 1 つの点 ── z_0 としよう ── からなる．したがって，z_0 と D の境界との距離を d とすれば $(d = \inf_{\zeta \in \partial D} |z_0 - \zeta|)$，十分大きな番号 n_0 があって，$\bar{\triangle}_{n_0}$ は開円盤 $|z - z_0| < d/3$ に含まれる．そこで，$\triangle_{n_0}$ の周上に 1 点 c をとり，**f** に属する関数要素 $P(z, c)$ を考える．任意の $\zeta \in \partial D$ に対して，3 角不等式により，$|\zeta - c| \geq |\zeta - z_0| - |z_0 - c| > d - (d/3) = 2d/3$ であるから，$P(z, c)$ の収束半径 $\rho(c)$ は $\rho(c) > 2d/3$ をみたす．したがって，$P(z, c)$ の収束円は $\bar{\triangle}_{n_0}$ を含む．だが，$P(z, c)$ は多価ではないので，これは矛盾である．　■

定理 7.6 の仮定のもとでは，各点 $\alpha \in D$ における関数要素 $P(z, \alpha)$ はただ 1 つであるから，写像 $\phi : D \to \mathbb{C}$ を

$$\phi(\alpha) := P(\alpha, \alpha) \tag{7.1}$$

によって定義できる．この複素関数について次の事実が成立する．

【系 7.7】　定理 7.6 の仮定のもとで，ϕ は D 上で正則である．

証明　各 $\alpha \in D$ における関数要素 $P(z, \alpha)$ の収束円内 $U_{\rho(\alpha)}(\alpha)$ の任意の点 z' に対して，$P(z, z') = P(z, \alpha), z \in U_{\rho(\alpha)}(\alpha) \cap U_{\rho(z')}(z')$ であるから，特に，$P(z', z') = P(z', \alpha)$．したがって，$\phi(z') = P(z', \alpha)$．ゆえに，$\phi$ は $U_{\rho(\alpha)}(z)$ で正則である．α は D の任意の点であったから，ϕ は領域 D 上で正則である．　■

7.5 特異点，存在領域，自然境界

$\mathrm{Log}\, z$ は負の実軸上で不連続である（したがって，$0 < |z| < R$ で正則でない）から，$z = 0$ は $\mathrm{Log}\, z$ の孤立特異点ではない．しかし，$\lim_{z \to 0} |\mathrm{Log}\, z| = +\infty$ であるから，$z = 0$ は $\mathrm{Log}\, z$ が有する一種の特異点とみなすことができよう．$\log z$ の他の枝についても同様である．ゆえに，$z = 0$ は解析関数 $\log z$ にとって特異な点である．一般の解析関数についても，同様の事態が存在する場合がありうることが洞察される．そこで，解析関数に関する特異点の概念を次のような仕方で導入する：

【定義 7.8】 曲線 $C = C(t)$, $t \in [0, 1]$, $C(0) = a$, $C(1) = b$ に沿って，関数要素 $P(z, a)$ を解析接続するとき，C のいかなる部分弧 $\widehat{a\zeta}$ $(\zeta = C(\tau), 0 < \tau < 1)$ をとっても，それに沿って解析接続可能であるが，$z = b$ までは解析接続できないとき，$P(z, a)$ は点 b において，**C によって定まる特異点**をもつという．

もし，b を終点とするいかなる曲線に対しても，b が $P(z, a)$ の特異点であるとき，b を単に $P(z, a)$ の**特異点**という．

解析関数 $\mathbf{f}$ の 1 つの要素 $P(z, a)$ が点 b において，曲線 C によって定まる特異点をもつとき，$\mathbf{f}$ は曲線 C によって定まる特異点 b をもつという．また，b が $\mathbf{f}$ のある要素の特異点であるとき，b を $\mathbf{f}$ の特異点という．

冪級数で定義される正則関数の特異点については，次の定理が基本的である：

【定理 7.9】 $a \in \mathbb{C}$ とし，冪級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ $(c_n \in \mathbb{C}, n \geq 0)$ の収束半径を $R > 0$ とする．このとき，（1 つの関数要素とみられた）f は，収束円 $|z - a| = R$ 上に少なくとも 1 つの特異点をもつ．

証明 仮に，f は収束円 $C_R : |z - a| = R$ 上に特異点をもたないとする．このとき，C_R 上の任意の点 b に対して，f は，適当な曲線に沿って，点 b まで解析接続できる．この場合の点 b における関数要素を $P(z, b)$ とし，その収束半径を R_b とする．そこで，$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < R\} \cup \left(\bigcup_{b \in C_R} \{z \in \mathbb{C} \mid |z - b| < R_b\}\right)$ とおけば，これは C_R を含む領域であり，f は D 上で正則な関数 F に解析接続される．（$|z - b| < R_b$ ならば，$F(z) = P(z, b)$; $|z - a| < R$ ならば，$F(z) = f(z)$.）F の点 a でのテイラー展開の収束半径は R よりも大きい．これは f の収束半径

が R よりも大きいことになるので，矛盾である． ∎

解析関数の特異点の性質を調べよう．

【命題 7.10】 $P(z,a)$，C を定義 7.8 のものとし，$P(z,a)$ は，C のいかなる部分弧 $\widehat{a\zeta}$ $(\zeta = C(\tau), 0 < \tau < 1)$ をとっても，それに沿って解析接続可能であると仮定し，$P(z, C(\tau))$ $(0 \le \tau < 1)$ の収束半径を $r(\tau)$ とする．このとき，点 b が，$P(z,a)$ の C によって定まる特異点であるための必要十分条件は

$$\lim_{\tau \to 1} r(\tau) = 0 \tag{7.2}$$

となることである．

証明 **（必要性）** 対偶を証明する．そこで，(7.2) が成立しないとする．このとき，$\rho := \limsup_{\tau \to 1} r(\tau) > 0$．すると，$\tau_n \to 1$ $(n \to \infty)$ となる点列で $r(\tau_n) > \rho/2$ $(n \in \mathbb{N})$ をみたすものがとれる．したがって，C の連続性により，ある番号 n_0 があって，$n \ge n_0, \tau_n \le t \le 1$ ならば，$|C(t) - C(\tau_n)| < \rho/2 < r(\tau_n)$ が成り立つ．これは，部分弧 $C\widehat{(\tau_n)b}$ $(n \ge n_0)$ が $P(z, C(\tau_n))$ の収束円内に含まれることを意味する．そこで，b における $P(z, C(\tau_n))$ の直接接続を $Q(z,b)$ とすれば，これは $P(z,a)$ の解析接続である．ゆえに，b は特異点ではない．

（十分性） これも対偶を証明する．そこで，点 b が，$P(z,a)$ の C によって定まる特異点でないとする．したがって，$P(z,a)$ は点 b まで解析接続できる．$P(z,b)$ の収束半径を $r > 0$ とすれば，$|C(\tau) - b| \le r/2$ をみたす $\tau \in [0,1)$ に対しては，$r(\tau) \ge r/2$ である．したがって，$\lim_{\tau \to 1} r(\tau) \ne 0$． ∎

■ **例 7.7** ■　関数 f は領域 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-b| < R\}$ で正則で，b は f の極または真性特異点であるとする．このとき，b に十分近い点 a における f のテイラー展開 $P_f(z,a)$ の収束半径は $\rho(a) = |b-a|$ である．したがって，$\lim_{a \to b} \rho(a) = 0$．ゆえに，$a$ を始点，b を終点とする D 内のいかなる曲線に対しても，$P_f(z,a)$ は b まで解析接続することはできない．ゆえに，点 b は，f の（上に定義した意味での）特異点である．よって，確かに，上述の特異点の概念は，極および真性特異点の一般化になっている．

■ **例 7.8** ■　$a \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ とし，$P(z,a) = \operatorname{Log} a + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}(z-a)^k/ka^k$ とする．この関数の収束半径は $\rho(a) = |a|$ であり，$|z-a| < |a|$ において，$P(z,a) =$

$\mathrm{Log}\, z$ である．$\lim_{a\to 0}\rho(a) = 0$ であるから，a を始点，原点を終点とし，かつ原点を通らない，いかなる曲線に対しても，$P(z,a)$ は原点まで解析接続することはできない．ゆえに，原点は，$\mathrm{Log}\, z$ の特異点である．

■ **例 7.9** ■ 第5章の演習問題9により，解析関数 z^ν $(\nu \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$ の各枝の点 $a \neq 0$ における整級数展開の収束半径 $\rho(a)$ は $\rho(a) = |a|$ であるから，$\lim_{a\to 0}\rho(a) = 0$. したがって，$z = 0$ は解析関数 z^ν の特異点である．

与えられた正則関数がどこまで解析接続できるかは，もちろん，その正則関数の性質による．たとえば，領域 D で定義された正則関数に対して，領域 D の境界 ∂D に属するすべての点が f の特異点であれば，この f は ∂D を越えて解析接続することはできない．実際，そのような正則関数は存在する．例を1つ見よう．

■ **例 7.10** ■ $f(z) := \sum_{n=0}^\infty z^{2^n}$（幾何級数の部分級数）は $|z| < 1$ で絶対収束するので，$|z| < 1$ で正則である．だが，円 $|z| = 1$ 上の任意の点は f の特異点である．

証明 まず，f は，関数方程式 $f(z) = z + f(z^2)\cdots(*)$ をみたすことに注目する．したがって，$r \in (0,1)$ に対して，$f(r) > 0$, $f(r) = r + f(r^2)$．任意の $\varepsilon \in (0,1)$ と $1-\varepsilon < r < 1$ に対して，$f(r) > 1 - \varepsilon + f(r^2)$．そこで，$\alpha := \liminf_{r\to 1} f(r)$ とすれば，$\alpha \geq (1-\varepsilon) + \alpha$ であるから，α が有限ならば，矛盾が生じる．したがって，$\alpha = +\infty$．ゆえに，$\lim_{r\to 1} f(r) = +\infty$．これは，点 $z = 1$ が f の特異点であることを意味する．($\because$ もし，特異点でないとすると，f はある曲線 C に沿って，点 $z = 1$ まで解析接続できるが，そうして得られる関数要素 $P(z,1)$ は，$z = 1$ のある近傍と $|z| < 1$ との共通部分において，$f(z)$ に等しい．だが，このとき，$\lim_{r\to 1} f(r) = P(1,1)$ は存在するので，矛盾が生じる．)

次に各自然数 k に対して，ω_k を1の 2^k 乗根の任意の1つとすれば ($\omega_k^{2^k} = 1$；このような ω_k は 2^k 個ある)

$$\lim_{r\to 1} |f(\omega_k r)| = +\infty \quad (k = 1, 2, \cdots)\cdots(**)$$

が成り立つことを，数学的帰納法よって示そう．まず，$k = 1$ の場合であるが，$(*)$ により，$f(\omega_1 r) = \omega_1 r + f(r^2)$．したがって，$|f(\omega_1 r)| \geq |f(r^2)| - r$ であるので，前段の結果により，$\lim_{r\to 1} |f(\omega_1 r)| = +\infty$．ゆえに，$(**)$ は $k = 1$ の場合に成立する．そこで，$k = m$ の場合に $(**)$ が成立したとしよう．$\omega'_m = \omega_{m+1}^2$ とおくと，ω'_m は1の 2^m 乗根である．$(*)$ により $f(\omega_{m+1} r) = \omega_{m+1} r + f(\omega'_m r^2)$．したがって，$|f(\omega_{m+1} r)| \geq |f(\omega'_m r^2)| - r$．帰納法の仮定により，右辺は，$r \to 1$ のとき，無限大に発散する．ゆえに，$k = m+1$ のときも，$(**)$ は成立する．よって，$|z| = 1$

上の点 $z = \omega_k, k \in \mathbb{N}$ は f の特異点である．

$S := \{\omega_k^\ell \mid k \in \mathbb{N}, \ell = 0, 1, \cdots, 2^k - 1\}$ とすれば，$S \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ であり，S の任意の点は f の特異点である．容易にわかるように，円 $|z| = 1$ 上の任意の点 ζ に対して，$\lim_{n\to\infty} z_n = \zeta$ となる点列 $z_n \in S$ が存在する．仮に，ζ が f の特異点でないとすれば，f は，ζ のある δ 近傍 $U_\delta(\zeta)$ へと解析接続される．だが，十分大きな n に対しては，$z_n \in U_\delta(\zeta)$ となるので，これは，z_n が f の特異点であることと矛盾する．ゆえに，ζ は f の特異点でなければならない．こうして，円 $|z| = 1$ 上の任意の点は f の特異点であることが結論される．　■

このような例の存在を考慮して，ある概念を導入する：

【定義 7.11】　複素平面上の領域 D について，D を定義域とする正則関数 f があって，f が D の境界を越えて D の外へ解析接続できないとき，D を f の**存在領域**，D の境界を f の**自然境界**という．

定義から明らかなように，D が正則関数 f の存在領域であるとき，D の境界点はすべて f の特異点である．

例 7.10 は，単位円内がある正則関数の存在領域であることを示すものであるが，実は，一般に，次の驚くべき定理が成り立つ．

【定理 7.12】　任意の領域 D に対して，D をその存在領域とする正則関数が存在する．

紙数の都合上，この定理の証明は割愛する（事実だけを知っておくだけでも十分に価値はある）[8]

7.6　解析関数のリーマン面

第 1 章，1.9 節で見たように，初等的な多価関数（対数関数，累乗関数）に関して，リーマン面なる対象を導入することにより，1 価の正則関数が定義される．実は，この型の構造は，任意の解析関数に対しても存在することが以下のようにしてわかる．

---

[8] 証明については，たとえば，楠 幸男『解析函数論』（廣川書店，1974）の定理 35.3（p.191〜192）を参照．

まず，以前に定義した解析関数の概念について，若干の言い換えを行う．$\mathbf{f}$ を任意の解析関数とする．$\mathbf{f}$ は正則関数（関数要素）を要素とする集合であるから，適当な添字集合 Λ を用いて，$\mathbf{f} = \{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と表すことができる．ここで，f_λ は正則関数であり，その定義域を D_λ とする．このとき

$$\mathsf{D}_{\mathbf{f}} := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda \tag{7.3}$$

とおけば，$\mathsf{D}_{\mathbf{f}}$ は領域である（演習問題 2）．この領域 $\mathsf{D}_{\mathbf{f}}$ を定義域とする関数 f を次のように定義する：

$$z \in D_\lambda \text{ ならば } f(z) := f_\lambda(z).$$

ここで，次の点に注意しよう．すなわち，$z \in \mathsf{D}_{\mathbf{f}}$ を含む D_λ は一般には 1 つとは限らないから，対応 : $\mathsf{D}_{\mathbf{f}} \ni z \mapsto f(z)$ は一般には多価でありうる．（多価）関数 f を**ヴァイエルシュトラースの意味での解析関数**という．この場合，f_λ を f の 1 つの**枝**という[9]．

■ 例 7.11 ■ 例 7.5 によって，対数関数の主値 $\mathrm{Log}\, z$ は，ヴァイエルシュトラースの意味での解析関数としての $\log z$ の枝である．

（多価）関数 f を 1 価関数に直すために，対数関数 $\log z$ の場合の方法を一般化することにより，定義域を拡大することを考える．これは次のようにしてなされる．まず，$\mathsf{D}_{\mathbf{f}}$ を含む $\mathbb{C}$ とは別に，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $\mathbb{C}$ を 1 つ割り当て，これを $\mathbb{C}_\lambda$ と記す．この場合，$\lambda \neq \mu$ ならば，$\mathbb{C}_\lambda$ と $\mathbb{C}_\mu$ は別の集合とみる（すなわち，$\mathbb{C}_\lambda \cap \mathbb{C}_\mu = \emptyset, \lambda \neq \mu$）．

$$\mathbb{C}_\Lambda := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{C}_\lambda$$

とし，$\mathbb{C}_\Lambda$ の任意の元を $\boldsymbol{z}$ で表す．各 $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}_\lambda \subset \mathbb{C}_\Lambda$ に対して，これと同じ複素数 z が $\mathbb{C}$ 内に一意的に定まる．この z を点 $\boldsymbol{z}$ の**射影**とよぶ．この場合，「点 $\boldsymbol{z}$ は z の上にある」という．したがって，写像 $p_\lambda : \mathbb{C}_\lambda \to \mathbb{C}$ を $z = p_\lambda(\boldsymbol{z})$ によって定義できる．明らかに，p_λ は全単射である．

---

[9] 7.4 節で定義した枝の考え方と本質的に同じである．だが，ここでの枝は，f の枝であることに注意（7.4 節のそれは，$\mathbf{f}$ の枝）．

$\mathbb{C}$ 内の領域 D_λ に対して，$\mathbb{C}_\lambda$ 内において対応する領域は

$$\mathbb{D}_\lambda := \{z \in \mathbb{C}_\lambda \mid p_\lambda(z) \in D_\lambda\} = p_\lambda^{-1}(D_\lambda)$$

で与えられる．したがって，領域の集まり $\{\mathbb{D}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が得られたことになる．だが，この段階では，これらの領域は，“ばらばら” であり，共通部分をもたない．そこで，次の規約によって，$\mathbb{D}_\lambda$ たちを “貼り合わせる”：

> **規約**：点 $\mathbf{a} \in \mathbb{D}_\lambda$ と $\mathbf{a}' \in \mathbb{D}_\mu$ に対して，$p_\lambda(\mathbf{a}) = p_\mu(\mathbf{a}') = a$ かつ a のある近傍で $f_\lambda(z) = f_\mu(z)$ が成り立つとき，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{a}'$ は**貼り合わせ可能**であるといい，$\mathbf{a} = \mathbf{a}'$ と記す．この同一視を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{a}'$ との**貼り合わせ**とよぶ．
>
> $\mathbb{D}_\lambda$ の部分集合 A と $\mathbb{D}_\mu$ の部分集合 B について，ある部分集合 $S \subset \mathsf{D}_{\mathbf{f}}$ があって，$p_\lambda(\mathsf{A}) = p_\mu(\mathsf{B}) = S$ かつ任意の $z \in S$ に対して，$p_\lambda^{-1}(z) \in \mathsf{A}$ と $p_\mu^{-1}(z) \in \mathsf{B}$ が貼り合わせ可能であるとき，A と B は**貼り合わせ可能**であるといい，A = B と記す．この同一視を A と B との**貼り合わせ**とよぶ

この規約のもとで，次の命題が成立する：

【命題 7.13】　$U = D_\lambda \cap D_\mu \neq \emptyset$ とする．もし，ある $\mathbf{a} \in \mathbb{D}_\lambda$ とある $\mathbf{a}' \in \mathbb{D}_\mu$ が貼り合わせ可能ならば，$p_\lambda^{-1}(U)$ と $p_\mu^{-1}(U)$ は貼り合わせ可能である．

証明　$p_\lambda(\mathbf{a}) = p_\mu(\mathbf{a}') = a$ とすれば，a のある近傍 $U_\delta(a) \subset U$ があって，任意の $z \in U_\delta(a)$ に対して，$f_\lambda(z) = f_\mu(z)$．したがって，一致の定理により，U 上で $f_\lambda(z) = f_\mu(z)$ が成り立つ．これは，任意の $z \in U$ に対して，$p_\lambda^{-1}(z)$ と $p_\mu^{-1}(z)$ が貼り合わせ可能であることを意味する．ゆえに題意が成立する．　■

上の規約のもとで定義される集合

$$\mathsf{R}_f := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{D}_\lambda \tag{7.4}$$

を**解析関数 f のリーマン面**とよぶ．

第 1 章，1.9 節で導入した，対数関数や累乗関数のリーマン面は，まさに，上に定義した意味でのリーマン面の例になっている．

最後に，解析関数 f は，そのリーマン面上の1価関数とみなせることを示そう．写像 $\widetilde{f}:\mathsf{R}_f \to \mathbb{C}$ を次のように定義する：各 $\boldsymbol{z} \in \mathsf{R}_f$ に対して，$\boldsymbol{z} \in \mathbb{D}_\lambda$ をみたす λ があるので

$$\widetilde{f}(\boldsymbol{z}) := f_\lambda(p_\lambda(\boldsymbol{z})) \tag{7.5}$$

これは，λ の選び方によらない[10]．ゆえに $\widetilde{f}$ は1価関数で．さらに，次の定理が成り立つ：

【定理 7.14】 $\widetilde{f}$ は R_f の各点で正則である．

証明 各 $\boldsymbol{z}_0 \in \mathsf{R}_f$ に対して，$\boldsymbol{z}_0 \in \mathbb{D}_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ がある．したがって $\widetilde{f}(\boldsymbol{z}_0) = f_\lambda(z_0)$．ただし，$z_0 = p_\lambda(\boldsymbol{z}_0) \in D_\lambda$．$f_\lambda$ は z_0 のある近傍 —— $U_0 \subset D_\lambda$ としよう —— で正則であるから，$\widetilde{f}$ は $\boldsymbol{z}_0$ の近傍 $p_\lambda^{-1}(U_0)$ で正則である． ■

7.7 多変数正則関数と関数関係不変の原理

1変数の正則関数の概念は，多変数複素関数 —— 複数の複素数を変数とする複素数値関数 —— の場合に拡張されうる．

$\mathbb{C}$ の n 個の直積集合

$$\mathbb{C}^n := \{z = (z_1, \cdots, z_n) \mid z_j \in \mathbb{C},\ j = 1, \cdots, n\} \tag{7.6}$$

を考える．任意の $z = (z_1, \cdots, z_n), z' = (z'_1, \cdots, z'_n) \in \mathbb{C}$ および $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，和 $z + z' \in \mathbb{C}^n$ および z の α 倍 αz を次のように定義する：

$$z + z' := (z_1 + z'_1, z_2 + z'_2, \cdots, z_n + z'_n), \quad \alpha z := (\alpha z_1, \alpha z_2, \cdots, \alpha z_n). \tag{7.7}$$

$\mathbb{C}^n$ の部分集合 D から $\mathbb{C}$ への写像を，D を定義域とする $\boldsymbol{n}$ **変数複素関数**という．このような複素変数関数を総称的に**多変数複素関数**という．

$\mathbb{C}_n$ の中の点列 $\{z^{(k)} = (z_1^{(k)}, \cdots, z_n^{(k)})\}_{k=1}^\infty$ が点 $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ に収束するとは，$\lim_{k\to\infty} z_j^{(k)} = a_j$, $j = 1, \cdots, n$ が成り立つことであり（定義），このことを $\lim_{k\to\infty} z^{(k)} = a$ と表す．

---

10) 別に $\boldsymbol{z} \in \mathbb{D}_\mu$ をみたす μ があったとすれば，$z = p_\lambda(\boldsymbol{z}) = p_\mu(\boldsymbol{z})$ のある近傍で $f_\lambda(z) = f_\mu(z)$．したがって，$f_\lambda(p_\lambda(\boldsymbol{z})) = f_\mu(p_\mu(\boldsymbol{z}))$．

点 $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ と定数 $r_j > 0,\ j = 1, \cdots, n$ に対して決まる部分集合

$$D_{r_1,\cdots,r_n}(a) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_j - a_j| < r_j\} \tag{7.8}$$

を，点 a を中心とする**多重円盤** (polydisc) という．この型の集合を a の**近傍**という．

$\mathbb{C}^n$ の部分集合 D で定義された複素数値関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が点 $a \in D$ で**連続**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $r_1, \cdots, r_n > 0$ が存在して，$z \in D_{r_1,\cdots,r_n}(a) \cap D$ ならば $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つときをいう．このことを

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$$

と表す．

f が D のすべての点で連続であるとき，f は D で**連続**であるという．

$\mathbb{C}^n$ の部分集合 O が**開集合**であるとは，O の任意の点 a に対して，定数 $r_1, \cdots, r_n > 0$ が存在して $D_{r_1,\cdots,r_n}(a) \subset O$ が成立する場合をいう．

さて，1変数の場合，関数 f が点 $a \in \mathbb{C}$ の近傍で正則であるということは，f がこの近傍で次のように表されることと同値である：

$$f(z) = f(a) + \alpha(z - a) + \varepsilon(z; a), \quad \lim_{z \to a} \frac{\varepsilon(z; a)}{|z - a|} = 0.$$

ただし，$\alpha = f'(a)$ は定数であり，$\varepsilon(z; a)$ は z の関数である．この性質は多変数にも拡張可能であり，次の定義へと導かれる：

【定義 7.15】　f は $\mathbb{C}^n$ の開集合 D で定義された複素数値関数とする．各点 $a \in D$ の近傍において，f が次の形に表されるとき，f は D で**正則**であるという：

$$f(z) = f(a) + \alpha_1(z_1 - a_1) + \cdots + \alpha_n(z_n - a_n) + \varepsilon(z; a). \tag{7.9}$$

ただし，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ は定数で

$$\lim_{z \to a} \frac{\varepsilon(z; a)}{|z_1 - a_1| + \cdots + |z_n - a_n|} = 0. \tag{7.10}$$

次の定理は基本的である：

【定理 7.16】　開集合 $D \subset \mathbb{C}^n$ 上の正則関数 f に対して，次の (i), (ii) が成り立つ：

(i) f は D で連続である.

(ii) 各 $j=1,\cdots,n$ に対して, $z_1,\cdots,z_{j-1},z_{j+1},\cdots,z_n$ を固定し, $f(z_1,\cdots,z_n)$ を z_j の関数とみるとき, これは正則であり, (7.9) における定数 α_j に対して

$$\alpha_j = \left.\frac{\partial f(z)}{\partial z_j}\right|_{z=a}$$

が成り立つ. ただし, $z_1,\cdots,z_{j-1},z_{j+1},\cdots,z_n$ を固定した場合の f の z_j に関する導関数を $\partial f/\partial z_j$ で表し, $(\partial f(z)/\partial z_j)|_{z=a}$ はその導関数の $z=a$ における値である.

証明 (i) は 1 変数の正則関数の場合と同様にして示される.

(ii) $a\in D$ を任意にとる. $e_j := (0,\cdots,0,\overset{j\text{ 番目}}{1},0,\cdots,0)\in\mathbb{C}^n$ とおく. (7.9) により, 任意の $h\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (ただし, $|h|$ は十分小とする) に対して ($a+he_j=(a_1,\cdots,a_{j-1},a_j+h,a_{j+1},\cdots,a_n)$ に注意)

$$\left|\frac{f(a+he_j)-f(a)}{h}-\alpha_j\right| = \left|\frac{\varepsilon(a+he_j;a)}{h}\right| = \frac{|\varepsilon(a+he_j;a)|}{|h|}.$$

(7.10) により, 右辺は, $h\to 0$ のとき, 0 に収束する. したがって, $f(z)$ は $z=a$ で z_j について微分可能であり, $(\partial f(z)/\partial z_j)|_{z=a}=\alpha_j$ が成り立つ. $a\in D$ は任意であったから, 題意が成立する. ∎

$\partial f/\partial z_j$ を**変数** z_j **に関する偏導関数**という.

【定理 7.17】 f を開集合 $D\subset\mathbb{C}^n$ で正則な関数, g_j $(j=1,\cdots,n)$ を開集合 $\Delta\subset\mathbb{C}^m$ で正則 (m と n は異なってもよい) かつ任意の $w\in\Delta$ に対して $(g_1(w),\cdots,g_n(w))\in D$ をみたすものとする. このとき, 合成関数

$$h(w) := f(g_1(w),\cdots,g_n(w))$$

は Δ 上の正則関数であり, 次の微分公式が成り立つ:

$$\frac{\partial h}{\partial w_k} = \sum_{j=1}^{n}\left.\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}\right)\right|_{z_\ell=g_\ell(w);\ell=1,\cdots,n}\frac{\partial g_j}{\partial w_k}.$$

証明 1 変数正則関数の合成関数の場合と同様. ∎

次の定理は，解析接続に関する極めて重要な性質に関わるものである：

【定理 7.18】（関数関係不変の原理）　$D_j, j = 1, \cdots, p$ を $\mathbb{C}$ の領域とし，$f_{j1}, \cdots, f_{jn}$ を D_j 上の正則関数とする．各 $j = 1, \cdots, p-1$ に対して，$D_j \cap D_{j+1} \neq \emptyset$ であり，各 $k = 1, \cdots, n$ ごとに，f_{jk} は $f_{(j+1)k}$ と互いに他の解析接続になっているとする．このとき，n 変数の正則関数 $F(w_1, \cdots, w_n)$ に対して

$$F(f_{11}(z), f_{12}(z), \cdots, f_{1n}(z)) = 0, \quad z \in D_1 \tag{7.11}$$

ならば

$$F(f_{p1}(z), f_{p2}(z), \cdots, f_{pn}(z)) = 0, \quad z \in D_p. \tag{7.12}$$

ただし，F は f_{jk} $(j = 1, \cdots, p,\ k = 1, \cdots, n)$ の値域を含む領域で定義されているとする．

証明　各 $j = 1, \cdots, p$ に対して，$G_j(z) := F(f_{j1}(z), \cdots, f_{jn}(z))$, $z \in D_j$ とおけば，定理 7.17 によって，$G_j(z)$ は D_j 上で正則である．仮定により，$D_j \cap D_{j+1}$ 上で $G_j(z) = G_{j+1}(z)$ が成り立つ．いま，$G_1(z) = 0, z \in D_1$ であるから，$G_2(z) = 0, z \in D_1 \cap D_2$．すると，一致の定理により，$G_2(z) = 0, z \in D_2$．同様に，$G_j(z) = 0, z \in D_j$ ならば，一致の定理により，$G_{j+1}(z) = 0, z \in D_{j+1}$ が成立する．よって，帰納法により，$G_p(z) = 0, z \in D_p$ が得られる．　▮

この定理は，その名が示唆するように，正則関数に関する関数関係式自体は，解析接続によって，変わらないことを語るものである．

■ **例 7.12** ■　一般に，F を $(n+2)$ 個の複素変数の関数とする．このとき，領域 D 上の正則関数 f に関する関係式

$$F(z, f(z), f'(z), \cdots, f^{(n)}(z)) = 0, \quad z \in D \tag{7.13}$$

を f に関する **n 階の微分方程式**という．

たとえば，$b, a_0, \cdots, a_n$ を複素定数とし，$p \in \mathbb{Z}$,

$$F(z_1, z_2, \cdots, z_{n+2}) = bz_1^p + \sum_{j=2}^{n+2} a_{j-2} z_j$$

とすれば，(7.13) は

$$bz^p + a_0 f(z) + a_1 f'(z) + \cdots + a_n f^{(n)}(z) = 0$$

という形をとる.

方程式 (7.13) が，ある点 $a \in \mathbb{C}$ の近傍で正則な解 f をもつならば，その任意の解析接続を ϕ とするとき，ϕ も方程式 (7.13) の解である.

証明 $f_{11}(z) = z, f_{12}(z) = f(z), \cdots, f_{1(n+2)}(z) = f^{(n)}(z)$ とすれば，ある $p \geq 1$ があって，$f_{p1}(z) = z, f_{p2}(z) = \phi(z), \cdots, f_{p(n+2)}(z) = \phi^{(n)}(z)$ は，それぞれ，$f_{11}, \cdots, f_{1(n+2)}$ の解析接続である．したがって，関数関係不変の原理の応用により

$$F(z, \phi(z), \phi'(z), \cdots, \phi^{(n)}(z)) = 0.$$

∎

演習問題

1. (i) 各 $n \in \mathbb{Z}$ と $a \in \Pi_0 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ に対して，冪級数

$$P_n(z, a) := 2n\pi i + \operatorname{Log} a + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{z-a}{a} \right)^k$$

の収束半径は $|a|$ であることを示せ.

(ii) $|z-a| < |a|$, $z \in \Pi_0$ ならば，$P_n(z, a) = \operatorname{Log} z + 2n\pi i = \log_{2n\pi} z$ であることを示せ.

注意：これは，つまり，関数要素 $P_n(z, a)$ を，$a \in \Pi_0$ を変えながら，次々に解析接続することにより，Π_0 上の正則関数としての $\log_{2n\pi} z$ が得られることを語る.

(iii) $K_a := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < |a|\}$ とおく．$\operatorname{Re} a < 0$ ならば，$K_a \cap (-\infty, 0) = (2\operatorname{Re} a, 0) (\neq \emptyset)$ を示せ.

(iv) $\operatorname{Im} a > 0$ とし，$b \in K_a$ かつ $\operatorname{Im} b < 0$ となる点 b を任意にとる（そのような b の存在は (ii) によって保証される)．このとき，K_b 上の正則関数 $P_{n+1}(z, b)$ は $P_n(z, a)$ の，$(2\operatorname{Re} a, 0)$ を越えての解析接続であることを示せ.

注意：このようにして，$\operatorname{Log} z$ の解析接続として，無限多価関数としての $\log z$ が得られることがわかる.

2. (7.3) で定義される集合 $\mathrm{D}_{\mathbf{f}}$ は領域であることを示せ.

3. $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$ とし，$R_{a,b} := \left(\sqrt{|a-b|^2+4} - |a-b|\right)/2$ とおく．

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}[(z-a)(z-b)]^n$ は $|z-a| < R_{a,b}$ ならば絶対収束し，正則関数であることを示せ．

この正則関数を $f_a(z)$ とおく：

$$f_a(z) := \sum_{n=0}^{\infty}[(z-a)(z-b)]^n, \quad |z-a| < R_{a,b}.$$

(ii) $f_a(z)$ の解析接続をすべて求めよ．

4. f を $\mathbb{R}$ 上の連続関数とし，ある定数 R があって，$|x| \geq R$ ならば $f(x) = 0$ が成り立つとする．

(i) $k \in \mathbb{R}$ の関数

$$\widehat{f}(k) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)dx$$

は $\mathbb{R}$ 上連続であることを示せ．

注意：関数 $\widehat{f}$ は（定数倍の不定性を除いて）f の**フーリエ変換**とよばれる．

(ii) $M := \int_{-R}^{R} |f(x)|dx$ とおけば，$|\widehat{f}(k)| \leq M$, $k \in \mathbb{R}$（すなわち，$\widehat{f}$ は $\mathbb{R}$ 上有界）であることを示せ．

(iii) $\widehat{f}$ は整関数へと解析接続できることを示せ．

5. f を $(0, \infty)$ 上の連続関数で $M_f := \int_0^{\infty} |f(x)|dx < +\infty$ かつ $\int_0^{\infty} |x||f(x)|dx < +\infty$ をみたすものとする（積分は広義積分の意味でとる）．

(i) $k \in \mathbb{R}$ の関数

$$\tilde{f}(k) := \int_0^{\infty} e^{-ikx} f(x)dx$$

は $\mathbb{R}$ 上連続であることを示せ．

(ii) $\tilde{f}$ は $\mathbb{R}$ 上で有界であることを示せ．

(iii) $\tilde{f}$ は下半平面 $\Pi_- = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$ へと解析接続できることを示せ．

8

ガンマ関数とリーマンのゼータ関数

解析接続の理論の応用として，ガンマ関数とよばれる複素関数とリーマンのゼータ関数を考察する．

8.1 ガンマ関数

自然数 n に対して，$(n-1)!$ を対応させる写像の定義域（自然数全体）を，ある自然な仕方で，複素数の集合まで拡張することにより得られる複素関数が，ガンマ関数とよばれるものである．これは，解析学や物理学のさまざまな場所に現れる重要な関数のひとつである．

8.1.1 定義と基本的な性質

任意の自然数 n に対して

$$n! = \int_0^\infty e^{-t} t^n dt \tag{8.1}$$

が成り立つことは，部分積分をしてみれば容易に確かめられる[1)]．ここで，ちょっと見方を転換しよう．すなわち，右辺の積分で，n を複素数 $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ で置き換えてみるのである．実際，任意の $\varepsilon \in (0,1)$ に対して

$$M_\varepsilon := \sup_{t \geq 1} e^{-\varepsilon t} |t^z| = \sup_{t \geq 1} e^{-\varepsilon t} t^x < \infty$$

であるから，$x > -1$ ならば

---

1) $I_n := \displaystyle\int_0^\infty e^{-t} t^n dt$ とし，$e^{-t} t^n = (-e^{-t})' t^n$ に注意すれば

$$I_n = \Big[-e^{-t} t^n\Big]_0^\infty + n \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt = n I_{n-1}.$$

この単純な漸化式を解けば，$I_n = n!$ を得る（$I_0 = 1$ も使う）．

$$\int_0^\infty |e^{-t}t^z|dt \le \int_0^1 t^x dt + M_\varepsilon \int_1^\infty e^{-(1-\varepsilon)t}dt$$
$$= \frac{1}{x+1} + \frac{M_\varepsilon e^{-(1-\varepsilon)}}{1-\varepsilon} < \infty.$$

したがって，複素関数

$$\Gamma_1(z) := \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \quad \mathrm{Re}\, z > 0 \tag{8.2}$$

が定義される（(8.1) の右辺で n を $z-1$ で置き換えたもの）．$\int_0^\infty e^{-t}dt = 1$ であるから

$$\Gamma_1(1) = 1. \tag{8.3}$$

また，(8.1) により

$$\Gamma_1(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{8.4}$$

したがって，この意味で確かに，右半平面で定義された複素関数 $\Gamma_1 : \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 0\} \to \mathbb{C}$ は階乗関数 : $n \mapsto (n-1)!$ の一般化になっている．

関数 Γ_1 が正則であることを示そう．各 $t > 0$ に対して，関数 $e^{-t}t^{z-1}$ は z の整関数であり

$$g(t;z) := \frac{\partial}{\partial z}(e^{-t}t^{z-1}) = e^{-t}(\log t)t^{z-1}.$$

$0 < \sigma_1 < x = \mathrm{Re}\, z < \sigma_2$ としよう．このとき

$$|g(t;z)| \le h(t) := \begin{cases} |\log t\,|t^{\sigma_1-1} & ; \quad 0 < t < 1 \\ e^{-t}(\log t)t^{\sigma_2-1} & ; \quad t \ge 1 \end{cases}$$

容易にわかるように，$\int_0^\infty h(t)dt < \infty$（$t \ge 1$ ならば，$0 \le \log t \le t-1$ に注意）．したがって，定理 4.39 によって，$\Gamma_1(z)$ は $\sigma_1 < \mathrm{Re}\, z < \sigma_2$ で正則であり

$$\Gamma_1'(z) = \int_0^\infty e^{-t}(\log t)t^{z-1}dt \tag{8.5}$$

が成り立つ．σ_1, σ_2 は $0 < \sigma_1 < \sigma_2$ をみたす任意の実数であったから，**$\Gamma_1(z)$ は $\mathrm{Re}\, z > 0$ で正則であり，(8.5) が成り立つ**ことが結論される．

次に Γ_1 を右半平面よりも広い領域へ解析接続することを考える．次の部分積分ができることに注意する：$\mathrm{Re}\, z > 0$ に対して

$$\Gamma_1(z) = \int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{t^z}{z}\right)' dt = \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-t}t^z dt = \frac{\Gamma_1(z+1)}{z}.$$

したがって

$$\Gamma_1(z+1) = z\Gamma_1(z), \quad \mathrm{Re}\, z > 0 \tag{8.6}$$

が成り立つ．ここで，次の点に気づくことが重要である．すなわち，(8.6) の左辺は $\mathrm{Re}\,(z+1) > 0$，すなわち，$\mathrm{Re}\, z > -1$ でも定義できるということである．そこで，$\mathrm{Re}\, z > -1$ を定義域とする新しい関数 $\Gamma_2(z)$ を

$$\Gamma_2(z) := \frac{\Gamma_1(z+1)}{z}, \quad \mathrm{Re}\, z > -1 \tag{8.7}$$

によって定義する．$\lim_{z\to 0} z\Gamma_2(z) = \Gamma_1(1) = 1$ であるから，$\Gamma_2(z)$ は，$\mathrm{Re}\, z > -1$ において有理型であり，原点に 1 位の極をもち，原点以外では正則である．

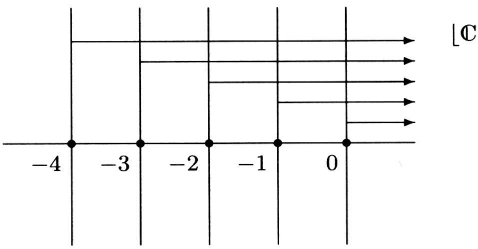


図 8.1 Γ_1 の逐次解析接続に関する領域

さらに，$\mathrm{Re}\, z > 0$ ならば，(8.7) の右辺は，(8.6) により，$\Gamma_1(z)$ に等しいから

$$\Gamma_2(z) = \Gamma_1(z), \quad \mathrm{Re}\, z > 0. \tag{8.8}$$

したがって，$\Gamma_2(z)$ は $\Gamma_1(z)$ の，領域 $\mathrm{Re}\, z > -1$ への解析接続である．ゆえに，(8.6) と関数関係不変の原理（定理 7.18）により

$$\Gamma_2(z+1) = z\Gamma_2(z), \quad \mathrm{Re}\, z > -1 \tag{8.9}$$

が成り立つことになる（これは直接計算でも簡単に示される）．

次に，関数 $\Gamma_3(z)$ を

$$\Gamma_3(z) := \frac{\Gamma_2(z+1)}{z}, \quad \mathrm{Re}\, z > -2 \tag{8.10}$$

によって定義する．Γ_3 は $\mathrm{Re}\, z > -2$ において有理型関数であり，$z = 0, -1$ に 1 位の極をもち，これら以外には極をもたない．$\mathrm{Re}\, z > -1$ ならば，(8.9) により，

$\Gamma_3(z)=\Gamma_2(z)$ となる．したがって，Γ_3 は Γ_2 の解析接続である．ゆえに，再び，関数関係不変の原理により

$$\Gamma_3(z+1)=z\Gamma_3(z), \quad \operatorname{Re} z>-2 \tag{8.11}$$

が成り立つ．

この手続きを逐次繰り返していけば，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，$\Gamma_1(z)$ の $\operatorname{Re} z>-n+1$ への解析接続 $\Gamma_n(z)$ で

$$\Gamma_n(z+1)=z\Gamma_n(z), \quad \operatorname{Re} z>-n+1 \quad (n\in\mathbb{N}) \tag{8.12}$$

をみたすものが構成されることがわかる．こうして，$\mathbb{C}\setminus\{-n\mid n=0,1,2,\cdots\}$ 上の解析関数 $\{\Gamma_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ が得られる．明らかに，この解析関数は 1 価である．

そこで，$\mathbb{C}$ 上の有理型関数 $\Gamma(z)$ を，$\operatorname{Re} z>-n+1$ ならば

$$\Gamma(z):=\Gamma_n(z) \tag{8.13}$$

によって定義することができる．この解析関数 Γ を**ガンマ関数**とよぶ．

その構成から明らかなように，Γ は $\mathbb{C}\setminus\{-n\mid n=0,1,2,\cdots\}$ 上で正則であり

$$\Gamma(1)=1 \tag{8.14}$$

をみたす．また，(8.6) と関数関係不変の原理により

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z), \quad \mathbb{C}\setminus\{-n\mid n=0,1,2,\cdots\} \tag{8.15}$$

が成り立つ．特に

$$\Gamma(n+1)=n!, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{8.16}$$

任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して，(8.15) から

$$\Gamma(z+n+1)=(z+n)(z+n-1)\cdots(z+1)z\Gamma(z). \tag{8.17}$$

そこで，$z\to -n$ の極限をとれば，

$$\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z)=\frac{1}{(-1)(-2)\cdots(-n)}=\frac{(-1)^n}{n!}.$$

したがって，Γ は $z=-n$ に 1 位の極をもち，その留数 $\operatorname{Res}(-n,\Gamma)$ について

$$\operatorname{Res}(-n,\Gamma)=\frac{(-1)^n}{n!} \tag{8.18}$$

が成り立つ．この式は，$n=0$ の場合にも成り立つ．

(8.15) によって，任意の自然数 n と $\alpha>0$ に対して

$$\Gamma(n+\alpha)=(n-1+\alpha)(n-2+\alpha)\cdots(1+\alpha)\alpha\Gamma(\alpha). \tag{8.19}$$

ここで，$\Gamma(z)=\Gamma_1(z)$, $\mathrm{Re}\,z>0$ と (8.2) によって

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \quad \mathrm{Re}\,z>0 \tag{8.20}$$

であることに注意しよう．特に，$z=1/2$ の場合，$x=\sqrt{t}$ と変数変換して積分計算を行うことにより

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \tag{8.21}$$

が得られる[2]．したがって

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}. \tag{8.22}$$

n が奇数ならば $(n+1)/2\in\mathbb{N}$ であるから $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)=\left(\frac{n+1}{2}-1\right)!$．$n$ が偶数で $n=2k\,(k\in\mathbb{N})$ ならば $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)=\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=(2k-1)!!\sqrt{\pi}/2^k$．まとめれば

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)=\begin{cases}\left(\dfrac{n+1}{2}-1\right)! & ;\ n\text{ が奇数のとき}\\[2ex] \dfrac{(n-1)!!}{2^{n/2}}\sqrt{\pi} & ;\ n\text{ が偶数のとき}\end{cases} \tag{8.23}$$

8.1.2 3角関数の積の積分

(8.20) において，変数変換 $x=\sqrt{t}$ を行うと

$$\Gamma(z)=2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2z-1}dx, \quad \mathrm{Re}\,z>0. \tag{8.24}$$

したがって，任意の $p,q>0$ に対して

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

---

2) $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}/2$ は既知とする．

そこで，極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $0 \le \theta \le \pi/2$, $r > 0$ を行えば

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\left(\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr\right)\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta\, d\theta.$$

したがって

$$2\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta\, d\theta = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{8.25}$$

これは，3 角関数の積に関する積分がガンマ関数を用いて計算されることを示す．特に

$$2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta\, d\theta = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}\sqrt{\pi}. \tag{8.26}$$

実は，(8.25) の左辺の関数（p, q の関数とみる）は，**ベータ関数**とよばれる関数で，通常，記号的に，$B(p, q)$ と記される：

$$B(p, q) := 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta\, d\theta, \quad p, q > 0. \tag{8.27}$$

したがって

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{8.28}$$

が示されたことになる．(8.27) で変数変換 $x = \cos^2\theta$ を行うと

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx, \quad p, q > 0 \tag{8.29}$$

という表示が得られる．これをベータ関数の定義とする本も多い．

8.1.3　n 次元の球の体積

$n \ge 2$ を自然数とする．半径 $a > 0$ の n 次元球

$$B_a^n := \{\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \le a^2\} \tag{8.30}$$

の体積 $V_n(a)$ は，B_a^n 上での定数関数 1 の n 重積分

$$V_n(a) := \int_{x_1^2+\cdots+x_n^2 \le a^2} 1\, dx_1 \cdots dx_n \tag{8.31}$$

によって定義される．これがガンマ関数を用いて表されることを示そう．

方針は単純である．(8.31) の右辺の積分を n 次元の極座標を用いて表せばよいだけである．n 次元の極座標は次のようにして構成される．まず，$\mathbb{R}^n$ の任意の点 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ から x_1 軸への正射影を考える．これは，$\mathbb{R}^n$ の原点 O と $\mathbf{x}$ を結ぶ線分が x_1 軸の正の向きとなす角度を $\theta_1 \in [0, \pi]$ とすれば，$x_1 = r\cos\theta_1$ で与えられる．ただし，$r = |\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$．このとき，$x_1$ 軸と直交する超平面への正射影を $\mathbf{x}^\perp$ とすれば，$|\mathbf{x}^\perp| = r\sin\theta_1$ であり，$\mathbf{x}^\perp$ は $\mathbf{x}^\perp = (0, x_1', \cdots, x_{n-1}')$ ($x_j' \in \mathbb{R}, j = 1, \cdots, n-1$) という形をもつ．そこで，今度は，$\mathbf{x}' := (x_1', \cdots, x_{n-1}')$ を $\mathbb{R}^{n-1}$ の点と考えて，その x_1 軸（もともとの $\mathbb{R}^n$ では x_2 軸）への正射影をとれば $x_2 = |\mathbf{x}'|\cos\theta_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2$ となる（$\theta_2 \in [0, \pi]$ は $\mathbf{x}'$ が x_1 軸の正の向きとなす角度）（図 8.2 を参照）．

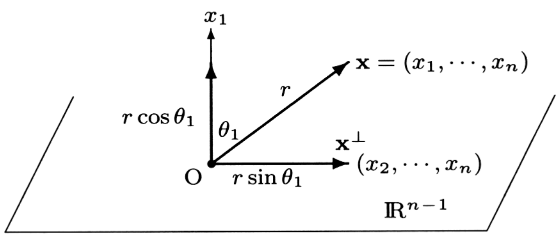


図 8.2 n 次元極座標の模式図

以下，同様の手続きを繰り返すことにより，次のように，**n 次元の極座標表示**が得られる：

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\theta_1, \\
x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\
x_3 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \\
x_4 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4, \\
&\vdots \quad \cdots\cdots \quad \vdots \\
x_{n-1} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\
x_n &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}.
\end{aligned}
$$

ただし，$r > 0$, $0 \le \theta_1, \cdots, \theta_{n-2} \le \pi$, $0 \le \theta_{n-1} \le 2\pi$．なお，$\theta_{n-1}$ の範囲が $[0, 2\pi]$ になっているのは，最後に現れる x_{n-1}-x_n 平面が 2 次元平面であること

による．(2 次元平面の極座標における偏角の範囲は $[0, 2\pi]$ であることに注意．)

座標変換 $(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) \mapsto (x_1, \cdots, x_n)$ のヤコビアン

$$J_n := \frac{\partial(x_1, \cdots, x_n)}{\partial(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1})} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial r} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial \theta_{n-1}} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial r} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \theta_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_2}{\partial \theta_{n-1}} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial r} & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \theta_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \theta_{n-1}} \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial r} & \dfrac{\partial x_n}{\partial \theta_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \theta_{n-1}} \end{vmatrix} \tag{8.32}$$

を計算するには，n 列に関して余因子展開を行えばよい．($j = 1, \cdots, n-2$ に対しては，(j, n) 成分は 0 であることに注意．) このとき，2 つの項が出てくるが，$(n-1, n)$ 余因子は，$(-1)\sin\theta_{n-1} J_{n-1}$ に等しく，(n, n) 余因子は，$\cos\theta_{n-1} J_{n-1}$ に等しいことに注意し，公式 $\cos^2\theta_{n-1} + \sin^2\theta_{n-1} = 1$ を用いて，それらをまとめることにより，漸化式

$$J_n = r \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-2} J_{n-1}$$

を導くことができる．したがって

$$J_n = r^{n-1} \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \cdots \sin^2\theta_{n-3} \sin\theta_{n-2} \tag{8.33}$$

が得られる．ゆえに

$$V_n(a) = 2\pi \left(\int_0^a r^{n-1} dr \right) \prod_{j=1}^{n-2} \int_0^\pi \sin^{n-1-j}\theta_j \, d\theta_j .$$

$\displaystyle\int_0^a r^{n-1} dr = a^n/n$ と $\displaystyle\int_0^\pi \sin^{n-1-j}\theta_j \, d\theta_j = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1-j}\theta_j \, d\theta_j$ および公式 (8.26) により

$$V_n(a) = 2\pi \frac{a^n}{n} (\sqrt{\pi})^{n-2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdots \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} .$$

したがって

$$V_n(a) = \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} a^n . \tag{8.34}$$

という美しい公式が得られる．

たとえば，$V_2(a) = \pi a^2/\Gamma(2) = \pi a^2$ は，確かに，半径が a の円の面積であり，$V_3(a) = (\sqrt{\pi})^3 a^3/[(3/2)\Gamma(3/2)] = 4\pi a^3/3$ は（$\Gamma(3/2) = \Gamma(1+1/2) = (1/2)\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$ に注意），確かに，半径 a の 3 次元球の体積を与える．ちなみに

$$V_4(a) = \frac{\pi^2}{2}a^4 \tag{8.35}$$

であることがわかる．

8.1.4 関数列の極限としてのガンマ関数

【定理 8.1】 $\mathrm{Re}\, z > 0$ において

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z. \tag{8.36}$$

! 注意 8.1 実は，(8.36) はすべての $z \in \mathbb{C} \setminus \{-n \mid n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ に対して成り立つ（後の系 8.4 を参照）．

証明 n を自然数，$\mathrm{Re}\, z > 0$ として，

$$F_n(z) := \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt$$

を考える．$\lim_{n\to\infty}(1-t/n)^n = e^{-t}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} F_n(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \Gamma(z).$$

（積分と極限の交換を正当化せよ[3]．）他方，F_n を定義する積分に関して，変数変換 $s = t/n$ を行うと $F_n(z) = n^z \int_0^1 (1-s)^n s^{z-1} ds$．そこで，$s^{z-1} = (s^z)'/z$ に注意して，次のように，部分積分を遂行する：

$$\begin{aligned} F_n(z) &= n^z \frac{n}{z} \int_0^1 (1-s)^{n-1} s^z ds = n^z \frac{n}{z} \cdot \frac{n-1}{z+1} \cdot \int_0^1 (1-s)^{n-2} s^{z+1} ds = \cdots \\ &= n^z \frac{n}{z} \cdot \frac{n-1}{z+1} \cdot \frac{n-2}{z+2} \cdots \frac{1}{z+n-1} \int_0^1 s^{z+n-1} ds \\ &= \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} n^z. \end{aligned}$$

[3] 不等式 $(1-t/n)^n \le e^{-t}$, $0 \le t \le n$ に注意．

ゆえに，$\mathrm{Re}\, z > 0$ に対して，(8.36) が成立する．∎

(8.36) の右辺によってガンマ関数を定義する場合もある（L. オイラーによる）．この式は，任意の z $(\mathrm{Re}\, z > 0)$ に対するガンマ関数の値 $\Gamma(z)$ の近似値を計算するのに有用である．

8.1.5 無限乗積表示

この項では，Γ 関数を無限乗積で表すことを考える．まず，補題を 1 つ用意する．

【補題 8.2】 極限

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right) \tag{8.37}$$

は存在する．

証明 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$ とおく．このとき，$a_{n+1}-a_n = \frac{1}{n+1}+\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$．そこで，対数関数 $\mathrm{Log}\,(1-z)$ の $|z|<1$ でのテイラー展開（第 5 章の演習問題 10）を用いると

$$a_{n+1}-a_n = -\left(\frac{1}{2(n+1)^2}+\frac{1}{3(n+2)^3}+\cdots\right) < 0.$$

したがって，数列 $\{a_n\}_n$ は狭義単調減少である．また

$$\int_1^n \frac{1}{x}dx < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

であり，左辺は，$\log n$ であるから，$a_n > 0$．したがって，$\{a_n\}_n$ は下に有界な狭義単調減少数列であるから，収束する．すなわち，極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ は存在する．∎

(8.37) によって定義される定数 γ を**オイラーの定数**という．この定数もいろいろなところに現れる興味深い定数である．

余談になるかもしれないが，上の補題の根底にある，ひとつの普遍的な発想法にふれておこう．和 $\sum_{k=1}^{n} 1/k$ は $n\to\infty$ のとき発散する．また，$\log n$ も $n\to\infty$ のとき発散する．したがって，補題 8.2 は，発散する級数の第 n 部分和から，適当な発散数列の第 n 項を差し引くことにより，収束する数列が構成される場合の

一例になっている．このように，発散級数の部分和から，適当な発散数列を引くことにより，収束数列をつくり，その極限として，もとの発散級数に同伴する，何らかの意味のある有限な数を取り出すことを**発散級数の正則化**とよぶ．この種の考え方は，それなりに有用な面をもつ．

【定理 8.3】 $\Gamma(z)$ は零点をもたず，すべての $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \tag{8.38}$$

が成り立つ．

証明

$$G_n(z) := \frac{n!}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z$$

とおくと，(8.36) により，$\lim_{n\to\infty} G_n(z) = \Gamma(z)$, $\mathrm{Re}\, z > 0 \cdots (*)$．一方，単なる代数的計算であるが

$$G_n(z) = \frac{e^{z(\log n - \sum_{k=1}^{n} 1/k)}}{z} \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}}$$

と変形できることに注意する．したがって

$$\frac{1}{G_n(z)} = ze^{z(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n)} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}.$$

定理 6.23 の証明でみたように，すべての $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}$$

は存在し，z の整関数を与える．これと補題 8.2 および $(*)$ によって，$\mathrm{Re}\, z > 0$ に対して (8.38) が得られる．同時に，$1/\Gamma(z)$ は $\mathrm{Re}\, z > 0$ に極をもたないこと，したがって，$\mathrm{Re}\, z > 0$ で $\Gamma(z)$ は零点をもたないことがわかる．すると，一致の定理（定理 6.8）により，$1/\Gamma(z)$ は，整関数であることになるので，$\Gamma(z)$ は $\mathbb{C}$ において零点をもたないこと，およびすべての $z \in \mathbb{C}$ に対して，(8.38) が成立することが導かれる． ∎

(8.38) の右辺によって，ガンマ関数を定義する場合がある（ヴァイエルシュトラースによる）．

! 注意 8.2 $f(z) := 1/\Gamma(z)$ の零点は，$z = -n\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$ だけであるから，定

理 6.23-(iii) の条件が, この f に対して成立することが確かめられ, かつ $f'(0)/f(0) = \gamma$ が証明できるならば, (8.38) は, 定理 6.23 からただちにしたがう. だが, いま述べた条件の検証は, それほど簡単ではない. そこで, ここでは, ガンマ関数のオイラーによる表示を経由して (8.38) を証明したのである.

【系 8.4】 (8.36) はすべての $z \in \mathbb{C} \setminus \{-n \mid n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ に対して成り立つ.

証明　定理 8.3 の証明から, (8.36) の右辺は, すべての $z \in \mathbb{C} \setminus \{-n \mid n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ に対して収束して, 有理型関数を定義する. したがって, 定理 8.1 と一致の定理 (定理 6.8) により, 題意が成立する. ∎

公式 (8.38) から

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = -z^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = -\frac{z}{\pi} \sin(\pi z).$$

ここで, 正弦関数の無限乗積表示 (6.38) を用いた. これと $\Gamma(-z+1) = -z\Gamma(-z)$ により

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \tag{8.39}$$

という重要な関数関係式が得られる.

8.1.6　複素階乗関数

この節の冒頭で述べたように, $\Gamma(z+1)$ は $n!$ の複素変数版であるという捉え方も可能である. この観点から, 任意の複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$z! := \begin{cases} \Gamma(z+1) & ; \ z \neq -n, \ n \in \mathbb{N} \\ \infty & ; \ z = -n, \ n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{8.40}$$

という記号を定義し, これを **z の階乗**とよぶ. 対応 : $z \mapsto z!$ を**複素階乗関数**という. 言うまでもなく, ガンマ関数に関する関係式は, 複素階乗関数の記号を用いて表すことができる. たとえば

$$z! = z(z-1)!. \tag{8.41}$$

8.2 リーマンのゼータ関数

この節では，リーマンのゼータ関数

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \mathrm{Re}\, s > 1 \tag{8.42}$$

(例 5.2) の解析接続を考察し，そこから導かれる基本的な結果を論じる[4]．

8.2.1 全平面への解析接続

リーマンのゼータ関数を解析接続するための方法のひとつは，それに対する適切な積分表示を求め，これを利用することである．この方法の基本的な例は，すでに，ガンマ関数の場合に見た．

ゼータ関数の積分表示を得るための出発点となるのは恒等式

$$\frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{s-1} dt, \quad \mathrm{Re}\, s > 0,\ n \in \mathbb{N} \tag{8.43}$$

である．(これは単なる変数変換 $r = nt$ で簡単に証明できる．) 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{n=1}^{N} e^{-nt} = \frac{e^{-t}(1 - e^{-Nt})}{1 - e^{-t}} \le \frac{1}{e^t - 1}, \quad t > 0$$

であり，$\mathrm{Re}\, s > 1$ ならば，$\int_0^{\infty} |t^{s-1}|/(e^t - 1) dt < +\infty$ であるので[5]，(8.43) において，n に関する無限和をとるとき，右辺で積分と和を交換することができる．ゆえに

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt, \quad \mathrm{Re}\, s > 1 \tag{8.44}$$

が得られる．

任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して，積分

$$J(s) := \int_{C_{\infty,0}^{(\varepsilon)}} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz \tag{8.45}$$

---

4) この節では，ゼータ関数の変数を s で表す．これはまったく便宜的なものである．

5) $s = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおくと，$\int_0^{\infty} |t^{s-1}|/(e^t - 1) dt = I_1 + I_2$ と書ける．ただし，$I_1 := \int_0^{\log 2} t^{x-1}/(e^t - 1) dt, I_2 := \int_{\log 2}^{\infty} t^{x-1}/(e^t - 1) dt$．$e^t - 1 \ge t$，$t \ge 0$ であるから，$I_1 \le \int_0^{\log 2} t^{x-2} dt < +\infty$，$x > 1$．また，$t \ge \log 2$ ならば，$e^t - 1 \ge e^t/2$ であるから $t^{x-1}/(e^t - 1) \le 2t^{x-1}e^{-t}$．8.1.1 項で示したように，$\int_{\log 2}^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt < +\infty$．したがって，$I_2 < +\infty$．

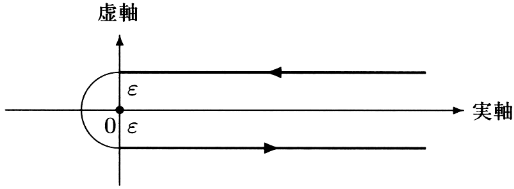


図 8.3　曲線 $C^{\varepsilon}_{\infty,0}$

を考える．ただし，$(-z)^{s-1} = e^{(s-1)\mathrm{Log}\,(-z)}$ (Log は対数関数の主値)，積分路 $C^{(\varepsilon)}_{\infty,0}(t)$ $(0 < \varepsilon \leq 1)$ は

$$\{t + i\varepsilon \mid t \geq 0\} \cup \{\varepsilon e^{i\theta} \mid \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2\} \cup \{t - i\varepsilon \mid t \geq 0\}$$

を像とするような連続微分可能な単純曲線で ∞ から上半平面を原点に向かい，原点のまわりを反時計回りに回って，下半平面を通って再び ∞ に戻るものである (図 8.3 を参照)．積分の絶対収束性は，8.1.1 項と同様のやり方で示すことができる．さらに，微分と積分の交換可能性を検証することにより（4.13 節の方法と同様)，$J(s)$ は s の整関数であることがわかる．

関数 $\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}$ は z に関して，$\mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ 上で正則であるので，コーシーの積分定理（定理 4.8）により，$J(s)$ は ε の取り方によらない（証明は定理 4.10 の証明と同様)．そこで

$$J(s) = -\int_0^\infty \frac{(-t-i\varepsilon)^{s-1}}{e^{t+i\varepsilon}-1}dt + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{(-\varepsilon e^{i\theta})^{s-1}}{e^{\varepsilon e^{i\theta}}-1} i\varepsilon e^{i\theta}d\theta \\ + \int_0^\infty \frac{(-t+i\varepsilon)^{s-1}}{e^{t-i\varepsilon}-1}dt$$

と分けて，右辺の各項において，$\varepsilon \to 0$ とすれば，$\mathrm{Re}\, s > 1$ のとき

$$J(s) = (e^{i\pi(s-1)} - e^{-i\pi(s-1)}) \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt = -2i\sin(\pi s)\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt$$

が得られる．したがって，(8.44) によって

$$J(s) = -2i\sin(\pi s)\Gamma(s)\zeta(s), \quad \mathrm{Re}\, s > 1.$$

そこで，(8.39) を使えば，$\mathrm{Re}\, s > 1$ に対して

$$\zeta(s) = -\frac{1}{2\pi i}\Gamma(1-s)J(s) \tag{8.46}$$

が成立することになる．$J(s)$ は整関数であったから，右辺は，ガンマ関数 $\Gamma(1-s)$ の極，すなわち，$s = n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を除いて正則である．他方，ζ は，$\mathrm{Re}\, s > 1$ で正則であることはわかっている．したがって，ζ は $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ へと解析接続される．その解析接続も同じ記号 ζ で表すことにすれば，$\mathbb{C}$ 上の有理型関数の等式として (8.46) が成り立つ．

$s = 1$ が極であるかどうかを調べるために，$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s)$ が存在するかどうかを調べる．$C^{(\varepsilon)}_{\infty,0}$ を原点を中心とする半径 ε の円へと連続変形し，留数定理（定理 4.33）を応用すれば

$$J(1) = 2\pi i \tag{8.47}$$

がわかる．したがって

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{s\to 1}[(1-s)\Gamma(1-s)J(s)] = 1.$$

ゆえに，$s = 1$ は $\zeta(s)$ の 1 位の極であり，その留数は 1 である：

$$\mathrm{Res}\,(1, \zeta) = 1. \tag{8.48}$$

8.2.2　リーマンの関数等式

次の事実は驚異的である：

【定理 8.5】（リーマンの関数等式）　$\mathbb{C}$ 上の有理型関数の等式の意味で

$$2^{1-s}\Gamma(s)\zeta(s)\cos\frac{s\pi}{2} = \pi^s\zeta(1-s) \tag{8.49}$$

が成り立つ．

証明　$\varepsilon \in (0, 1)$ を十分小さな正数とし，N を自然数とする．点 $z = (2N+1)\pi + i\varepsilon$ を出発点とし，半径 $r_N = \sqrt{(2N+1)^2\pi^2 + \varepsilon^2}$ の円周を反時計回りに回って，点 $z = (2N+1)\pi - i\varepsilon$ に到達する曲線を K_N とする．また，点 $z = (2N+1)\pi + i\varepsilon$ を出発点とし，$C^{(\varepsilon)}_{\infty,0}$ と同じ経路をたどって左側に進み，点 $z = (2N+1)\pi - i\varepsilon$ の到達する曲線を $C^{(\varepsilon)}_{(2N+1)\pi,0}$ とする．このとき，$C_N := K_N \cdot (-C^{(\varepsilon)}_{(2N+1)\pi,0})$ は閉曲線であり，関数 $g(z) := (-z)^{s-1}/(e^z - 1)$ の C_N の内部にある極は，$2n\pi i, n = \pm 1, \cdots, \pm N$ であり（位数は 1），極 $z = 2n\pi i$ における留数は

$$\mathrm{Res}\,(2n\pi i, g) = \begin{cases} (2n\pi)^{s-1}e^{-\pi(s-1)i/2} & ; n \geq 1 \\ (2|n|\pi)^{s-1}e^{\pi(s-1)i/2} & ; n \leq -1 \end{cases}$$

と計算される．したがって，コーシーの積分定理（定理 4.8）により

$$\int_{C_N} g(z)dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} [\mathrm{Res}\,(2n\pi i, g) + \mathrm{Res}\,(-2n\pi i, g)]$$
$$= \sum_{n=1}^{N} 4\pi i (2n\pi)^{s-1} \sin\frac{\pi s}{2}.$$

左辺は，$\int_{K_N} g(z)dz - \int_{C^{(\varepsilon)}_{(2N+1)\pi,0}} g(z)dz$ に等しい．したがって

$$\int_{C^{(\varepsilon)}_{(2N+1)\pi,0}} g(z)dz = -4\pi i \left(\sum_{n=1}^{N} (2n\pi)^{s-1}\right) \sin\frac{\pi s}{2} + \int_{K_N} g(z)dz.$$

K_N 上では，$|1/(e^z-1)| \leq c$（c は N, ε によらない定数）が成り立つことは容易にわかる．したがって，$\mathrm{Re}\, s < 0$ ならば

$$\left|\int_{K_N} g(z)dz\right| \leq 2\pi c((2N+1)\pi+1)^{\mathrm{Re}\, s} \to 0 \quad (N \to \infty).$$

これと $\lim_{N\to\infty} \int_{C^{(\varepsilon)}_{(2N+1)\pi,0}} g(z)dz = J(s)$ に注意すれば

$$J(s) = -4\pi i \sin\frac{\pi s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi)^{s-1}, \quad \mathrm{Re}\, s < 0$$

が得られる．右辺を変形すれば

$$J(s) = -2i(2\pi)^s \sin\frac{\pi s}{2} \zeta(1-s), \quad \mathrm{Re}\, s < 0 \tag{8.50}$$

へと導かれる．これと (8.46) により

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{\pi} (2\pi)^s \sin\frac{\pi s}{2} \zeta(1-s).$$

そこで，左辺から，$\Gamma(s)$ をかけて，公式 (8.39) と $\sin\pi s = 2\sin\frac{\pi s}{2}\cos\frac{\pi s}{2}$ を使えば，$\mathrm{Re}\, s < 0$ に対して，(8.49) が得られる．すると一致の定理（定理 6.8）により，これは全平面上の有理型関数としての等式として成立することが結論される．∎

8.2.3 零　点

ゼータ関数のオイラー積表示（例 6.11）により，次のことがわかる：

(Z.1) $\zeta(s)$ は，$\mathrm{Re}\, s > 1$ には零点をもたない．

リーマンの関数等式 (8.49) は

$$\zeta(s) = \frac{2^{s-1}\pi^s}{\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}}\zeta(1-s) \tag{8.51}$$

と書き直せる．関数

$$\eta(s) := \Gamma(s)\cos(s\pi/2)$$

は，$\mathrm{Re}\, s < 0$ において，有理型関数であり，その極は，$s = -2n\,(n \in \mathbb{N})$（1 位の極）でつくされる．したがって，$1/\eta(s)$ は $\mathrm{Re}\, s < 0$ で正則であり，その零点集合は $\{-2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ である．ゆえに，次のことが結論される：

(Z.2) $\zeta(s)$ の $\mathrm{Re}\, s < 0$ における零点集合は $\{-2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ であり，各零点 $-2n$ の位数は 1 である．

これらの零点は **$\zeta(s)$ の自明な零点**とよばれる．

ゼータ関数の自明な零点以外の零点 —— 非自明な零点 —— は，(8.51) より，$\zeta(1-s) = 0$ をみたさねばならない．すると (Z.1) により，$\mathrm{Re}\, s \geq 0$ でなければならない．よって，次の結論に到る：

(Z.3) $\zeta(s)$ の $-2n\,(n \in \mathbb{N})$ 以外の零点は，帯状領域 $0 \leq \mathrm{Re}\, s \leq 1$ の中にある．

ゼータ関数の非自明な零点の分布について，リーマンは次の予想をたてた：

リーマン予想　ゼータ関数 $\zeta(s)$ の任意の非自明な零点 ρ は $\mathrm{Re}\,\rho = 1/2$ をみたす．すなわち，$\zeta(s)$ の非自明な零点は，無限直線 $\mathrm{Re}\, s = 1/2$ 上にのっている．

実は，この予想は，世紀の大問題のひとつであって，いまだ証明されていない（2006 年 11 月現在）．これが証明されると，素数分布やこれと関連する問題について興味深い結果が得られる[6]．

---

[6] さらに詳しいことは，たとえば，鹿野 健 編著『リーマン予想』（日本評論社，1991）や本橋洋一『リーマンゼータ函数と保型波動』（共立出版，1999）を参照．リーマン予想を解く問題は，「ミレニアム賞金問題」のひとつにもなっている．これについては，たとえば，（一松 信 他『数学七つの未解決問題』（森北出版，2002）を参照．

演習問題

1. $\mathrm{Re}\, z > 0$ に対して

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{t}\right)^{z-1} dt$$

を示せ.

2. （**ミッタークーレフラーの展開式**）すべての $z \in \mathbb{C} \setminus \{-n \mid n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ に対して

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad \cdots\cdots \text{ (ML)}$$

を示せ.

注意：式 (ML) は，まず，$\mathrm{Re}\, z > 1$ で示される．すなわち，(ML) の右辺の関数を $F(z)$ とおくと，$\Gamma_1(z) = F(z)$, $\mathrm{Re}\, z > 1$．ところで，よく調べると，$\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ は，z の整関数であり（積分範囲が $[1, \infty)$ であることに注意；原点での特異性はない），$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$ は $\mathbb{C} \setminus \{-n \mid n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ で正則であることがわかる．したがって，F は，$\{-n \mid n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ を極の集合とする $\mathbb{C}$ 上の有理型関数である．ゆえに，$\Gamma_1(z)$ は全平面に有理型関数として解析接続され，それが定める解析関数は F に等しいことがわかる．こうして，関数 $\Gamma_1(z)$ に関する別の解析接続の方法が見出される．解析接続という点に関して言えば，この方法は，一目瞭然であるという点で優れていよう．

3. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^4} dx = \left(\frac{1}{4}\right)!$ を示せ.

4. 任意の $p > 0$ に対して

$$\int_0^\infty e^{-x^p} dx = \left(\frac{1}{p}\right)!$$

を示せ.

5. 任意の $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して

$$\lim_{z \to 0} \frac{(az-1)!}{(bz-1)!} = \frac{b}{a}$$

を示せ.

6. $\gamma = -\int_0^\infty e^{-t} \log t \, dt$ を示せ.

7. $\alpha, r > 0$ に対して，閉領域 $|x|^\alpha + |y|^\alpha \leq r^\alpha$ の面積を $S_r(\alpha)$ とすれば

$$S_r(\alpha) = \frac{2r^2\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)}$$

が成り立つことを示せ.

注意：$S_r(2)$ のときは，半径 r の円の面積である．$\alpha = 2/3$ のときの曲線 $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = r^{2/3}$ は**アステロイド**とよばれる.

8. $\mathrm{Re}\, s > 0$ に対して

$$\int_0^\infty \frac{x^s}{e^x + 1} dx = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \Gamma(s+1)\zeta(s+1)$$

を示せ.

9

物理学への応用

数学と自然科学との関係は，たとえば，物理学者は数学を，なくてはならないものとはいうものの，結局は補助の学問にすぎない，と考えたり，数学者は物理学が提供する問題を，ただの演習問題にすぎない，と考えたりする程度よりも，さらに深いものでなければならぬ，と考えています．
—ヴァイエルシュトラース[1)]

物理学をはじめとする自然科学への複素関数論の応用は実に広範囲にわたる．これを十全な形で論述しようと思えば，かなりの紙数が必要とされるし，場合によっては，それだけで優に一冊の書になりうる．この観点からすれば，この節の内容は，複素関数論の応用のほんの導入的部分にとどまるものである．

9.1 古典力学

古典力学は，物理現象のうちの最も“表層的な”部分，すなわち，日常的・巨視的な領域における物体の運動現象に関わる．ここでは，簡単のため，その質量が1つの点に集中しているとみなすことが可能な物体 —— これを**質点**とよぶ —— の運動を考察する[2)]．いま，質量 $m > 0$ の1個の質点が3次元ユークリッドベクトル空間 $\mathbb{R}^3 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid x_j \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, 3\}$ を運動する場合を考え，この質点には，位置 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ において，ベクトル $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$ によって表される力が働くとする[3)]．対応 $\mathbf{F} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x})$ を**力の場**または**力場**という．時刻 $t \in \mathbb{R}$ での

---

1) 小堀 憲『大数学者』（新潮選書，新潮社，1968）の p.167〜p.168.

2) 古典力学のより一般的な理論については，拙著『物理現象の数学的諸原理』（共立出版，2003）の第4章を参照.

3) 力はベクトルで表される.

質点の位置を $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), X_3(t)) \in \mathbb{R}^3$ とすれば，対応 $\mathbf{X} : t \mapsto \mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^3$ 内の曲線（ベクトル値関数）を与える．この曲線を質点の**運動曲線**とよび，その像を**軌道**または**軌跡**とよぶ．ニュートン力学によれば，力の場 $\mathbf{F}$ のもとで可能な運動の運動曲線は，**ニュートンの運動方程式**

$$m\frac{d^2\mathbf{X}(t)}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)) \tag{9.1}$$

の解，すなわち，この微分方程式をみたすベクトル値関数 $\mathbf{X}$ として与えられる．ただし

$$\frac{d^n\mathbf{X}(t)}{dt^n} := \left(\frac{d^nX_1(t)}{dt^n}, \frac{d^nX_2(t)}{dt^n}, \frac{d^nX_3(t)}{dt^n}\right), \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

であり，必要な微分可能性はつねに仮定しておく．運動曲線 $\mathbf{X}$ の時刻 t での微分係数 $\dot{\mathbf{X}}(t) := d\mathbf{X}(t)/dt$ を時刻 t での**速度**とよび，その絶対値 $|\dot{\mathbf{X}}(t)|$ を**速さ**という．また，質量と速度の積

$$\mathbf{p}(t) := m\dot{\mathbf{X}}(t) \tag{9.2}$$

を**運動量**という．

運動方程式 (9.1) は 2 階の常微分方程式（成分ごとに書けば 3 個の 2 階連立常微分方程式）であるので，その解を一意的に定めるためには，適当な時刻 t_0 —— **初期時刻**といい，通常，$t_0 = 0$ とする —— での位置 $\mathbf{X}(t_0)$ と速度 $\dot{\mathbf{X}}(t_0)$（または運動量 $\mathbf{p}(t_0)$）を指定する必要がある．時刻 t_0 での位置と速度の組 $(\mathbf{X}(t_0), \dot{\mathbf{X}}(t_0))$，または位置と運動量の組 $(\mathbf{X}(t_0), \mathbf{p}(t_0))$ を**初期条件**という．与えられた初期条件のもとで微分方程式 (9.1) の解を求める問題を (9.1) の**初期値問題**という．

さて，ニュートンの運動方程式 (9.1) を複素解析の理論と関連付けることを考える．そのために，まず，(9.1) は

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \frac{\mathbf{p}(t)}{m}, \quad \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)) \tag{9.3}$$

と同値であることに注意する．ここで視点を若干変えて，これらの式を物理量の対 $(X_j(t), p_j(t))$ に関する微分方程式とみる．これまでの章で見てきたように，実数量の対は，1 つの複素数とみるのが自然である．そこで，a, b を零でない実定数として，$aX_j(t), bp_j(t)$ を，ある複素量の実部と虚部として捉えてみるのである．すなわち，複素量

$$z_j(t) := aX_j(t) + ibp_j(t), \quad j = 1, 2, 3 \tag{9.4}$$

を導入する．（定数 a, b は，物理的には，物理量の次元をそろえることと，ある種の規格化のためのものである．）このとき，ニュートンの運動方程式 (9.1) は

$$\frac{dz_j(t)}{dt} = \frac{a}{m}p_j(t) + ibF_j(\mathbf{X}(t)), \quad j = 1, 2, 3$$

と書ける．(9.4) より

$$X_j(t) = \frac{z_j(t) + z_j(t)^*}{2a}, \quad p_j(t) = \frac{z_j(t) - z_j(t)^*}{2bi}. \tag{9.5}$$

そこで，$\mathbf{z}(t) := (z_1(t), z_2(t), z_3(t))$, $\mathbf{z}(t)^* := (z_1(t)^*, z_2(t)^*, z_3(t)^*)$ とし

$$K_j(\mathbf{z}(t), \mathbf{z}(t)^*) := \frac{a}{m} \cdot \frac{z_j(t) - z_j(t)^*}{2bi} + ibF_j\left(\frac{\mathbf{z}(t) + \mathbf{z}(t)^*}{2a}\right), \quad j = 1, 2, 3 \tag{9.6}$$

とおけば，ニュートンの運動方程式 (9.1) を解く問題は，3 個の複素量 $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$ に関する 1 階の連立微分方程式

$$\frac{dz_j(t)}{dt} = K_j(\mathbf{z}(t), \mathbf{z}(t)^*), \quad j = 1, 2, 3 \tag{9.7}$$

と同等であることがわかる．ここで重要な点は，もし，K_j が $z_j(t)^*$, $j = 1, 2, 3$ に依存しないならば，上の手続きによって，6 個の未知関数 $(X_j(t), p_j(t), j = 1, 2, 3)$ に関する微分方程式が 3 個の未知関数 $z_j(t)$, $j = 1, 2, 3$ に関する微分方程式へと変換されたことになるということである．言うまでもなく，未知関数の個数が少ない連立微分方程式の方がより解きやすい（以下にあげる例を参照）．こうして，ニュートンの運動方程式の理論と複素解析の理論の関わりの一端が見えてくる．いま示した方法によって簡単に解けるニュートンの運動方程式の例をみよう．

9.1.1　1 次元調和振動子

数直線 $\mathbb{R}$ 上の運動を考える（物理的には 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の中の直線上の運動）．$F(x) = -kx, x \in \mathbb{R}$　($k > 0$ は定数) で表される力場 F の作用のもとで運動する質点を **1 次元調和振動子** (one-dimensional harmonic oscillator) という[4]．この場合のニュートンの運動方程式は，質点の質量を $m > 0$，時刻 t での質点の位置を $X(t) \in \mathbb{R}$ とすれば

$$m\frac{d^2X(t)}{dt^2} = -kX(t) \tag{9.8}$$

[4] このような運動の基本的な例は，バネ定数が $k > 0$ のバネに結ばれた質点の運動である．

という形をとることになる．$\omega := \sqrt{k/m}$ とおく．上述の処方にしたがって

$$p(t) = m\dot{X}(t)$$

とし

$$A(t) := X(t) + i\frac{1}{m\omega}p(t) \tag{9.9}$$

とおけば，微分方程式 (9.8) は

$$\dot{A}(t) = -i\omega A(t) \tag{9.10}$$

という簡潔な 1 階の微分方程式と同値になる．$B(t) := A(t)e^{i\omega t}$ とおくと $\dot{B}(t) = 0$．したがって，複素定数 c があって，$B(t) = c,\ t \in \mathbb{R}$．ゆえに，方程式 (9.10) の解は

$$A(t) = ce^{-i\omega t} \tag{9.11}$$

という形をとる．この場合，$A(0) = c$ であることに注意しよう．$X(t) = \mathrm{Re}\,A(t)$, $p(t) = m\omega \mathrm{Im}\,A(t)$ であるから

$$X(t) = \frac{1}{2}(ce^{-i\omega t} + c^* e^{i\omega t}) = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t), \tag{9.12}$$

$$p(t) = \frac{m\omega}{2i}(ce^{-i\omega t} - c^* e^{i\omega t}) = m\omega[c_2\cos(\omega t) - c_1\sin(\omega t)] \tag{9.13}$$

が得られる[5]．ただし，$c_1 := \mathrm{Re}\,c$, $c_2 := \mathrm{Im}\,c$．$X(0) = c_1$, $p(0) = m\omega c_2$ であるから，運動方程式 (9.8) の初期値問題の解は

$$X(t) = X(0)\cos(\omega t) + \frac{p(0)}{m\omega}\sin(\omega t), \tag{9.14}$$

$$p(t) = p(0)\cos(\omega t) - m\omega X(0)\sin(\omega t) \tag{9.15}$$

で与えられる．

9.1.2 一様な磁場の中を運動する荷電粒子

この項では，はじめに述べた方法の文字通りの応用ではないが，「複素量を導入して，微分方程式を簡単に解く」という観点から興味のある例を扱う．

---

[5] 微分方程式 (9.8) の別の解法については，拙著「物理現象の数学的諸原理」(共立出版，2003) の第 4 章，4.3.5 項を参照．

空間 $\mathbb{R}^3$ の x_3 軸の正の向きに一様な磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$（$B > 0$ は定数）が存在しているとし，この中を電荷 $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ をもつ，質量 $m > 0$ の質点が運動する場合を考える．簡単のため，この磁場以外には，質点に働く力は存在しないとする．このとき，時刻 $t \in \mathbb{R}$ で質点に働く力は $q\dot{\mathbf{X}}(t) \times \mathbf{B}$（ローレンツ力）で与えられる．ただし，$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ に対して，$\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ はベクトル積を表す：

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} := (x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1).$$

したがって，いまの場合のニュートンの運動方程式は

$$m\frac{d^2\mathbf{X}(t)}{dt^2} = q\dot{\mathbf{X}}(t) \times \mathbf{B}. \tag{9.16}$$

これは，成分ごとに書けば

$$m\frac{d^2X_1(t)}{dt^2} = q\dot{X}_2(t)B, \quad m\frac{d^2X_2(t)}{dt^2} = -q\dot{X}_1(t)B, \tag{9.17}$$

$$m\frac{d^2X_3(t)}{dt^2} = 0. \tag{9.18}$$

微分方程式 (9.18) は簡単に解けて

$$X_3(t) = X_3(0) + \dot{X}_3(0)t, \quad t \in \mathbb{R} \tag{9.19}$$

を得る．(9.17) は

$$W(t) := p_1(t) + ip_2(t)$$

を導入すれば

$$\frac{dW(t)}{dt} = -i\frac{qB}{m}W(t)$$

と同値であることがわかる．前項の結果により

$$W(t) = W(0)e^{-iqBt/m} = \big(p_1(0) + ip_2(0)\big)e^{-iqBt/m}.$$

$p_1(t) = \mathrm{Re}\,W(t)$, $p_2(t) = \mathrm{Im}\,W(t)$ であるから

$$p_1(t) = p_1(0)\cos\frac{qBt}{m} + p_2(0)\sin\frac{qBt}{m}, \tag{9.20}$$

$$p_2(t) = p_2(0)\cos\frac{qBt}{m} - p_1(0)\sin\frac{qBt}{m}. \tag{9.21}$$

が得られる．これから，特に

$$p_1(t)^2 + p_2(t)^2 = p_1(0)^2 + p_2(0)^2, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{9.22}$$

したがって，考察下の運動は，速さが時刻によらない一定の運動，すなわち，等速運動である．

(9.20), (9.21) を用いて，$m\, dX_j(t)/dt = p_j(t)$, $j = 1, 2$ を積分することにより

$$X_1(t) = \frac{p_1(0)}{qB} \sin \frac{qBt}{m} + \frac{p_2(0)}{qB}\left(1 - \cos \frac{qBt}{m}\right) + X_1(0), \tag{9.23}$$

$$X_2(t) = \frac{p_2(0)}{qB} \sin \frac{qBt}{m} - \frac{p_1(0)}{qB}\left(1 - \cos \frac{qBt}{m}\right) + X_2(0). \tag{9.24}$$

これから次のことがわかる：

$$a_1 := X_1(0) + \frac{p_2(0)}{qB}, \quad a_2 := X_2(0) - \frac{p_1(0)}{qB}, \quad \mathbf{a} := (a_1, a_2),$$

$$R = \frac{\sqrt{p_1(0)^2 + p_2(0)^2}}{|q|B}, \quad \mathbf{r}(t) := (X_1(t), X_2(t))$$

とおけば

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| = R, \quad t \in \mathbb{R}.$$

すなわち，質点は，中心が $\mathbf{a}$ で半径が R の等速円運動を行う．その周期 T は $T = 2\pi m/(|q|B)$ である ($\mathbf{r}(t+T) = \mathbf{r}(t), \forall t \in \mathbb{R}$)．振動数の次元をもつ量 $|q|B/m$ は**サイクロトロン振動数**とよばれる．

9.2 流体力学

流体（気体，液体）の運動を扱う力学の領域は流体力学とよばれる．複素関数の理論は，2 次元の流体の流れの理論と密接に結びついている．この側面の本質的な部分を手短に見るのがこの節の目的である．

平面的な流れを考え（たとえば，川の水の水面における流れ），この流れがのっている平面を $\mathbb{R}^2 = \{\mathbf{r} := (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ とし，流体の存在する領域を Ω とする．Ω は単連結であるとする．流れの各点 $\mathbf{r} = (x, y) \in \Omega$ には，この点での流れの速度を表すベクトル（速度ベクトル）が付随している．これを $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (v_1(\mathbf{r}), v_2(\mathbf{r}))$ で表そう．対応：$\mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r})$ —— これは Ω から $\mathbb{R}^2$ への写像 —— を流体の**速度ベクトル場**とよぶ．

いま，Ω 内に2点A, Bをとり，Aを始点，Bを終点とする曲線 C を考え，これを $C(t)=(X(t),Y(t)),t\in[a,b]$ と表す．このとき，この曲線の一方の側から他方の側へ流れる，単位時間当たりの流体の量を $\psi_{\mathrm{A,B}}$ とし，これを求めてみよう．C 上の任意の点 $C(t)=(X(t),Y(t))$ での接ベクトルは $C'(t)=(X'(t),Y'(t))$ である．このベクトルをAからBへ向かう曲線 C の右側へ $\pi/2$ だけ回転して得られる法線単位ベクトルは $(Y'(t),-X'(t))/|C'(t)|$ である．したがって，この向きへの速度ベクトルの成分は $v_{\mathrm{n}}(t):=[v_1(C(t))Y'(t)-v_2(C(t))X'(t)]/|C'(t)|$ である．したがって，曲線上の2点 $C(t),C(t+\delta)$（$\delta>0$：十分小）の間（その距離は，近似的に $|C'(t)|\delta$ と表せる）を単位時間に通過する流体の量は近似的に $v_{\mathrm{n}}(t)|C'(t)|\delta$ に等しい．ゆえに

$$\psi_{\mathrm{A,B}}=\int_a^b v_{\mathrm{n}}(t)|C'(t)|dt=\int_a^b[v_1(C(t))Y'(t)-v_2(C(t))X'(t)]\,dt.$$

だが，最後の積分は線積分にほかならない：

$$\psi_{\mathrm{A,B}}=\int_C(v_1dy-v_2dx). \tag{9.25}$$

さて，いま考察している流体の面積密度（単位面積当たりの流体の質量）は一定 —— 時刻にも場所にもよらずに一定 —— であると仮定しよう．このような流体は，**非圧縮性流体**とよばれる．この場合，$\dfrac{\partial v_1}{\partial x}+\dfrac{\partial v_2}{\partial y}=0$ が成り立つ（**連続の方程式**[6]）．始点がAで終点がBの別の曲線 $\widetilde{C}$ をとり，閉曲線 $C\cdot(-\widetilde{C})$ を考え，この閉曲線の内部を D とすれば，ガウス–グリーンの定理（定理4.4）により

$$\int_{C\cdot(-\widetilde{C})}(v_1dy-v_2dx)=\int_D\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)dxdy=0.$$

したがって，$\int_C(v_1dy-v_2dx)=\int_{\widetilde{C}}(v_1dy-v_2dx)$．ゆえに，$\psi_{\mathrm{A,B}}$ は，AとBだけに依存し，これらを結ぶ曲線の取り方にはよらない．そこで，Aを定点とし，Bを動点とみて改めてPと書き，Pの座標を $\mathbf{r}$ とすれば $\mathbf{r}$ の関数

$$\psi(\mathbf{r}):=\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}}(v_1dy-v_2dx) \tag{9.26}$$

が定義されたことになる．これを**流れの関数**とよぶ．

---

[6] これは，物理的な考察から，理論的には公理として要請されるものである．より詳しくは，拙著『現代ベクトル解析の原理と応用』（共立出版，2006）の第10章，10.4節を参照．

$\psi(\mathbf{r})$ が A, P を結ぶ曲線の取り方によらないことを使えば，任意の $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$（ただし，$|\varepsilon|$ は十分小さくとる）に対して

$$\frac{\psi(x+\varepsilon, y) - \psi(x, y)}{\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon}\int_x^{x+\varepsilon} v_2(x', y)dx'.$$

したがって

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\psi(x+\varepsilon, y) - \psi(x, y)}{\varepsilon} = -v_2(x, y).$$

ゆえに，ψ は x について偏微分可能であり

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_2 \tag{9.27}$$

が成り立つ．同様にして，ψ は y について偏微分可能であり

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_1 \tag{9.28}$$

が成り立つことが示される．

速度ベクトル $\mathbf{v}$ が

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0$$

をみたすとき，この流れを**渦無しの流れ**とよぶ．

Ω 上の C^1 級実数値関数 ϕ があって

$$v_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{9.29}$$

が成り立つならば，容易にわかるように，これは渦無しの流れである．この場合，関数 ϕ を**速度ポテンシャル**とよぶ[7]．

以下，速度ポテンシャル ϕ をもつ非圧縮性流体を考える．したがって，(9.27), (9.28), (9.29) が成り立つ．これらの式は

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{9.30}$$

を意味する．したがって，ϕ, ψ はコーシー–リーマンの方程式をみたす．ゆえに

$$f(z) := \phi(\mathbf{r}) + i\psi(\mathbf{r}) \tag{9.31}$$

---

[7] 逆に，流れが渦無しであれば，Ω 内の任意の点の近傍において，速度ポテンシャルの存在を示すことができる．拙著『現代ベクトル解析の原理と応用』（共立出版，2006）の 10.4.2 項の冒頭部分を参照．

によって定義される複素関数は

$$D_\Omega := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid (x, y) \in \Omega\}$$

上で正則である．この f を**複素速度ポテンシャル**とよぶ．

逆に，D_Ω 上の正則関数 f が与えられたとき，$\phi(\mathbf{r}) = \mathrm{Re}\, f(z), \psi(\mathbf{r}) = \mathrm{Im}\, f(z)$ とし，(9.29) によって，v_1, v_2 を定義すれば，$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ は，渦無しの流れであり，ψ は，その流れの関数になる．

こうして，単連結領域上の正則関数と渦無しの非圧縮性流体の流れが対応していることがわかる．この意味で，単連結領域における渦無しの非圧縮性流体の理論は，この領域上の正則関数の理論と等価である．正則関数を与えるごとに流れが 1 つ定まるのである．ゆえに，流体力学への応用として，いろいろな正則関数を考察することにより，さまざまな流れの可能な形を研究することができる．

$f'(z) = \phi_x + i\psi_x = v_1 - iv_2$ であるから

$$|\mathbf{v}(x, y)| = |f'(z)|, \quad z = x + iy \tag{9.32}$$

が成り立つ．すなわち，複素速度ポテンシャルの微分の絶対値は，その点での速度ベクトルの大きさ，すなわち，速さに等しい．

複素速度ポテンシャル f は正則関数であるから，等角写像の理論（5.12 節）を適用できる．いま，f は単葉（単射）（5.11 節を参照）であるとしよう．したがって，$f'(z) \neq 0,\ z \in D_\Omega$．

$$f'(z) = \phi_x - i\phi_y = \psi_y + i\psi_x$$

と書けるので（定理 3.3-(i)），各 $(x, y) \in \Omega$ に対して，「$\phi_x(x, y) \neq 0$ または $\phi_y(x, y) \neq 0$」かつ「$\psi_x(x, y) \neq 0$ または $\psi_y(x, y) \neq 0$」が成り立つ．実数 c, k について，$c + ik \in \mathsf{R}(f) := \{f(z) \mid z \in D_\Omega\}$ とする．したがって，$f(z_0) = c + ik$ をみたす点 $z_0 = x_0 + iy_0 \in D_\Omega$ がある．このとき，$\phi(x_0, y_0) = c$．したがって，陰関数定理により，(x_0, y_0) を通る連続微分可能な曲線 $C(t)$ で $\phi(\mathrm{Re}\, C(t), \mathrm{Im}\, C(t)) = c$ となるものが存在する．この曲線を単に「曲線 $\phi(x, y) = c$」ということにする．同様に，曲線 $\psi(x, y) = k$ が存在する．

(9.31) によって与えられる複素速度ポテンシャル f に対して，$\psi(x, y) = k$ という形の曲線を**流線**，$\phi(x, y) = c$ という形の曲線を**等位線**とよぶ．

曲線 $\phi(x,y)=c$ の各点では, 合成関数の微分法により, $\partial_x\phi(x,y)+y'\partial_y\phi(x,y)=0$ が成り立つから, ベクトル $(1,y')$ と $\mathbf{v}=(v_1,v_2)=(\partial_x\phi,\partial_y\phi)$ は直交している. 一方, ベクトル $(1,y')$ は, 等位線上の点での接線ベクトルを表す. ゆえに, **等位線上の各点において, 速度ベクトルと等位線は直交する.**

【命題 9.1】 任意の $c+ik\in\mathsf{R}(f)$ に対して, 流線 $\psi(x,y)=k$ と等位線 $\phi(x,y)=c$ は直交する.

証明 流線 $\psi(x,y)=k$ の複素平面での表示を $C(t)=C_1(t)+iC_2(t)$ とし, 等位線 $\phi(x,y)=c$ の複素平面での表示を $L(t)=L_1(t)+iL_2(t)$ とすれば, $f(C(t))=\phi(C_1(t),C_2(t))+ik, f(L(t))=c+i\psi(L_1(t),L_2(t))$. $f(C(t))$ は w 平面上で, 実軸に平行な直線 $z=ik$ 上を動き, $f(L(t))$ は虚軸に平行な直線 $z=c$ 上を動く. 一方, 直線 $z=ik$ と直線 $z=c$ は点 $c+ik$ で直交する. したがって, f の等角性により, 曲線 C と L は z_0 で直交する. ∎

この命題と上述の事実により, 流線と等位線の交点における速度ベクトルの方向は, その点での流線の方向と一致することがわかる.

各 $k\in\mathsf{R}(\psi)$ に対する流線 $\psi(x,y)=k$ を S_k とすれば, k を動かすことにより, 流線の集まり (流線群) $\mathsf{S}:=\{S_k\mid k\in\mathsf{R}(\psi)\}$ がつくられる. 同様に, 各 $c\in\mathsf{R}(\phi)$ に対する等位線 $\phi(x,y)=c$ を E_c とすれば, 等位線の集まり (等位線群) $\mathsf{E}:=\{E_c\mid c\in\mathsf{R}(\phi)\}$ ができる. 上の命題により, 各 S_k と各 E_c は直交している. こうして, 互いに直交する, 2 つの曲線群 S と E の存在が明らかになる.

この節を終えるにあたって, 流れの基本的な例を見ておく. $f(z)$ を複素速度ポテンシャルとする. すでに指摘したように, これを具体的に与えることが流れの例を与えることである.

■例 9.1■ $f(z)=Uz$ ($U\neq 0$ は実定数). この場合, $\phi(x,y)=Ux, \psi(x,y)=Uy$, $\mathbf{v}(\mathbf{r})=(U,0)$. したがって, 速度ベクトルの方向は実軸に平行であり, その大きさ (速さ) $|\mathbf{v}(\mathbf{r})|=|U|$ は一定である. 流線の方程式は, $y=k/U$ (実軸に平行な直線), 等位線の方程式は, $x=c/U$ (虚軸に平行な直線) である (図 9.1). ゆえに, この複素速度ポテンシャルで表される流れは, 実軸方向の一定の速度をもつ流れと解釈される. ゆえに, この流れは**一様な流れ**とよばれる.

■例 9.2■ $f(z)=Az^n$ $(A>0, n\geq 2)$. この場合, $z=re^{i\theta}$ (極形式) とおけば

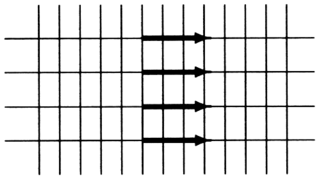


図 9.1　一様な流れ（$U > 0$ の場合）

$$\phi = Ar^n \cos n\theta, \quad \psi = Ar^n \sin n\theta.$$

$0 < \theta < \pi/n$ のとき，流線の方程式は，$r^n \sin n\theta = k/A$ $(k > 0)$ である．これは，頂角が π/n であるような角を回る流れと解釈される（図 9.2）．このゆえに，いまの複素速度ポテンシャルで表される流れは**角を回る流れ**とよばれる．

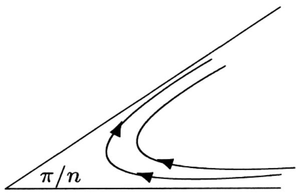


図 9.2　角を回る流れ

■ **例 9.3** ■　$f(z) = i\kappa \log z$（$\kappa \neq 0$ は実定数）．この場合，$\phi = -\kappa\theta$．$\psi = \kappa \log r$．したがって，流線の方程式 $\psi = k$ は，$r = e^{k/\kappa}$ という形であるので，流線群は原点を中心とする同心円群である．また，等位線群は，原点を通る放射直線群である（図 9.3）（ただし，原点を除く）．この流れは**渦糸**（うずいと）とよばれる．

■ **例 9.4** ■　$f(z) = m \log z$（$m \neq 0$ は実数）．この場合，$\phi = m \log r$, $\psi = m\theta$．したがって，流線 $\psi = k$ の方程式は，$\theta = k/m$ であるので，流線は原点を通る放射状の直線である（ただし，原点を除く）．これは，前例の流線と等位線の役割が入れ代わったものとみることができる．この例では，速度ベクトルは，$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = m\mathbf{r}/r^2$ であるので，$m > 0$ ならば，流れは，原点から外向きであり，$m < 0$ ならば，流れは原点に向かう．したがって，$m > 0$ ならば，原点は流れの湧き出し点を表し，$m < 0$ ならば，原点は流れの吸い込み点を表す．$m > 0$ の場合の状況にちなんで，この流

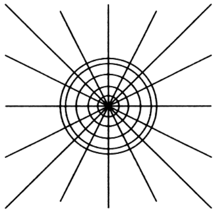


図 9.3　渦糸(うずいと)

れは**湧き出し**とよばれる．

■ **例 9.5** ■　$f(z) = m\log(z-\alpha) - m\log(z+\alpha)$（$m > 0$，$\alpha \neq 0$ は複素数）．前例の解釈により，これは，$z=\alpha$ に湧き出しが，$z=-\alpha$ に吸い込みのある流れを表す（図 9.4；$\alpha > 0$ の場合）．この意味で，この流れを**二重湧き出し**という．

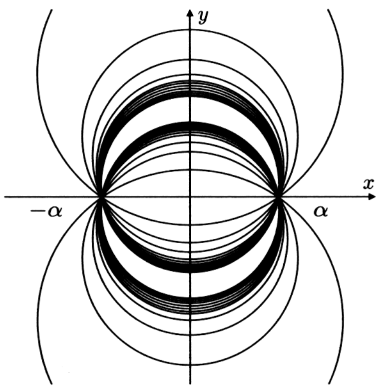


図 9.4　二重湧き出しの流線

■ **例 9.6** ■　**静止流体中を動く円柱．** 静止流体中を x 軸の正の向きに速さ $U > 0$ で動く，半径 $a > 0$ の円柱によって引き起こされる流れの速度ポテンシャルは

$$f(z) = -\frac{Ua^2}{z}$$

で与えられる[8]．この場合

---

[8] ここでは，この式の導出は省略する．たとえば，今井功『流体力学』（岩波書店，岩波全書 275，1970）の p.69 を参照．

$$\phi = -\frac{Ua^2x}{x^2+y^2}, \quad \psi = \frac{Ua^2y}{x^2+y^2}.$$

したがって，流線は，y 軸上に中心をもち，x 軸に接する円である（図 9.5）．

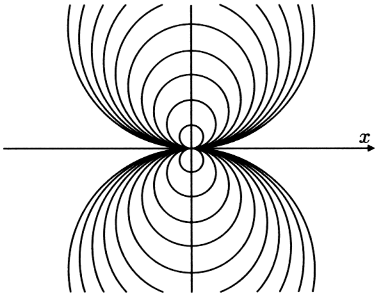


図 9.5　円柱の運動によって引き起こされる流れの流線

■ **例 9.7** ■　**静止した円柱のまわりの一様な流れ**の速度ポテンシャルは

$$f(z) = Uz + \frac{Ua^2}{z}$$

によって与えられる[9]．したがって，流線の方程式は

$$Uy - \frac{Ua^2y}{x^2+y^2} = k$$

である．ゆえに，流線は図 9.6 のようになる（円柱の外の領域，すなわち，$|z| > a$ における流れのみが物理的に意味をもつ）．

9.3 静 電 気 学

静止している複数の電荷のまわりには**電場**とよばれる力の場が生じる．これは 3 次元的には，$\mathbb{R}^3$ の中の 1 つの領域 Ω 上のベクトル場 $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = (E_1(\mathbf{x}), E_2(\mathbf{x}), E_3(\mathbf{x}))$ $(\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega)$ によって記述される（各成分 E_j は Ω 上の連続微分可能な実数値関数）．Ω における電荷の分布密度（単位体積当たりの電荷分布）

[9] 前掲書の p.70 を参照．

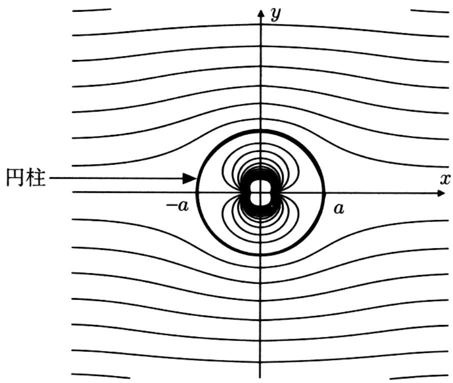


図 9.6　静止した円柱のまわりの一様な流れ（$|z| > a$ の領域）

を $\rho(\mathbf{x}) > 0$ とすれば $\mathbf{E}$ は微分方程式

$$\sum_{j=1}^{3} \partial_j E_j = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{9.33}$$

にしたがう（**ガウスの法則**）[10]．ただし，$\partial_j := \partial/\partial x_j$ であり，ε_0 は真空中の誘電率とよばれる物理定数である．領域 Ω の形状についてある条件がみたされるならば

$$E_j = -\partial_j V \tag{9.34}$$

をみたす連続微分可能な実数値関数 V が存在することを示すことができる．この V を電場 $\mathbf{E}$ に関する**静電位**あるいは単に**電位**とよぶ[11]．

以下，電位が存在する場合のみを考察し，V は x_3 方向には一定であるとしよう．つまり，V は x_3 には依存しないとする．このとき，明らかに，$E_3 = 0$ であり，E_1, E_2 も x_3 に依らない．そこで，改めて，2 次元的な電場 $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y) = (E_1(x, y), E_2(x, y))$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ を導入する．このとき，電荷のない空間 —— $D \subset \mathbb{R}^2$ としよう —— では，(9.33) によって

$$\partial_x E_1 + \partial_y E_2 = 0, \quad (x, y) \in D \tag{9.35}$$

---

10) これは，電磁気学の基礎方程式であるマクスウェルの方程式から導かれる．拙著『物理現象の数学的諸原理』（共立出版，2003）の第 7 章を参照．そこでの記号を使えば，$\mathrm{div}\mathbf{E} = \varrho/\varepsilon_0$ ということ．マクスウェル方程式に基づく電磁気学を学んでない読者は，原理から出る式を認めて読み進んでいただければよい．

11) **スカラーポテンシャル**という場合もある．

が成り立つ．したがって，前節の議論で $\mathbf{v}$ の代わりに $\mathbf{E}$ を考えれば

$$E_1 = \partial_y U, \quad E_2 = -\partial_x U$$

をみたす関数 U が存在する（前節の流れの関数に相当する関数）．$U(x, y) = c$（c は実定数）という形の曲線を電場 $\mathbf{E}$ に対する**電気力線**とよぶ．

電気力線 $U(x, y) = c$ 上の任意の点において，$\partial_x U + y' \partial_y U = 0$ であるから，$y' = E_2/E_1$．したがって，電気力線上の任意の点での接線ベクトルの向きはベクトル $\mathbf{E}$ の向きと一致する．

(9.34) によって

$$\partial_x U = \partial_y V, \quad \partial_y U = -\partial_x V.$$

すなわち，(U, V) はコーシー–リーマンの方程式をみたす．ゆえに

$$f(z) = U(x, y) + iV(x, y) \tag{9.36}$$

は正則関数である．こうして，x_3 軸方向によらない電位をもつ静電場の理論は，正則関数の理論と等価であることがわかる．

曲線 $V(x, y) = k$ $(k \in \mathbb{R})$ は**等電位線**とよばれる．等角性に関する前節での議論は，いまの文脈では，**等電位線群と電気力線群の直交性**を導く．

■ **例 9.8** ■　$f(z) = Az^2$（$A > 0$ は定数）は，互いに直交する帯電半無限導体面によって生じる電気力線と等電位線を記述する．いまの場合，等電位線の方程式

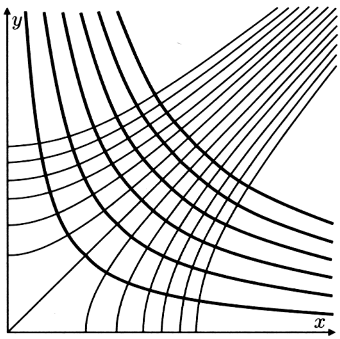


図 9.7　互いに直交する帯電半無限導体面による等電位線と電気力線

は，$2xy = k/A$ であるから，これは双曲線である．また，電気力線の方程式は，$x^2 - y^2 = c/A$ であるから，これも双曲線の方程式である．

前節の例で取り上げた複素速度ポテンシャルは，すべて，然るべき状況での電気力線と等電位線を記述する正則関数として読みかえることができる．だが，残念ながら，ここでは，紙数の都合上，これ以上詳しくふれることはできない[12)]．

9.4 量 子 力 学

量子力学は，原子や素粒子など，物質を構成する微視的な究極的要素に関する理論であり，現代物理学の根幹のひとつをなすものである．量子力学においては，複素数は本質的な理念のひとつである．これは，量子力学的な状態が複素ヒルベルト空間とよばれる高度に抽象的な空間によって表されるという一事に端的に現れている．この節の目的は，複素数と量子力学の関わりの一端を，理論において出合ういくつかの例を通して，垣間見ることである[13)]．

9.4.1 遷 移 確 率

量子力学系の状態は，一般には，観測によって，他の状態に確率的に“遷移” しうる．量子力学は，この種の遷移確率を計算する方法を提供する．

一例をあげよう．量子力学的状態の遷移確率の計算のための形式的摂動論において

$$I(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(E - E_0)t}{(E - E_0)^2} dE, \quad t \in \mathbb{R} \tag{9.37}$$

という積分が現れる．ただし，$E_0 \in \mathbb{R}$ は定数である．$1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$, $x \in \mathbb{R}$ を用いると

$$I(t) = 4\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{xt}{2}}{x^2} dx$$

と変形できる．そこで，次の式を用いる：

任意の $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して

---

12) 詳細については，たとえば，後藤憲一・山崎修一郎 共編『詳解 電磁気学演習』(共立出版，1970) の第 4 章，§3 を参照．

13) 量子力学の数学的理論の体系的論述については，拙著『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版，1997)，同『物理現象の数学的諸原理』(共立出版，2003) の第 10 章や新井朝雄・江沢 洋『量子力学の数学的構造 I, II』(朝倉書店，1999)，保江邦夫『数理物理学方法序説 3 量子力学』(日本評論社，2001) などを参照．

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 tx}{x^2}dx = \frac{|t|\pi}{2}. \tag{9.38}$$

証明　部分積分により

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 tx}{x^2}dx = 2t\int_0^\infty \frac{\sin tx \cos tx}{x}dx = t\int_0^\infty \frac{\sin 2tx}{x}dx$$
$$= t\int_0^\infty \frac{\sin ty}{y}dy = \frac{|t|\pi}{2}.$$

ここで，(4.68) を用いた． ∎

したがって

$$I(t) = \frac{\pi}{2}|t|. \tag{9.39}$$

9.4.2　グリーン関数

$m > 0$ を定数とし

$$E(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2), \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 \tag{9.40}$$

とおく．これは，質量が m，運動量 $\mathbf{p}$ の非相対論的自由粒子の運動エネルギーを表す．量子力学の散乱理論とよばれる領域において

$$K_{\mathbf{p}}^{\pm}(\mathbf{x}) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\mathbf{kx}}}{E(\mathbf{p}) - E(\mathbf{k}) \pm i\varepsilon}d\mathbf{k}, \quad \mathbf{p}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \tag{9.41}$$

という関数を計算する必要が生じる．ただし，$\mathbf{kx} := k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$.

ベクトル $\mathbf{x}$ の向きを $\mathbf{k}$-空間の第 3 軸の正の向きにとり，$\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3$ を極座標

$$k_1 = k\sin\theta\cos\phi,\ k_2 = k\sin\theta\sin\phi,\ k_3 = k\cos\theta$$

で表す $(\theta \in (0, \pi), \phi \in [0, 2\pi), k = \in (0, \infty))$．このとき

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{p},\varepsilon}^{\pm}(\mathbf{x}) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\mathbf{kx}}}{E(\mathbf{p}) - E(\mathbf{k}) \pm i\varepsilon}d\mathbf{k} \\ &= 4m\pi\int_0^\infty dk \frac{k^2}{\mathbf{p}^2 - k^2 \pm 2im\varepsilon}\int_0^\pi e^{ik|\mathbf{x}|\cos\theta}\sin\theta\, d\theta \\ &= \frac{4m\pi}{|\mathbf{x}|}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(k|\mathbf{x}|)}{\mathbf{p}^2 - k^2 \pm 2im\varepsilon}k\, dk. \end{aligned}$$

この最後の積分は次の公式によって計算できる：

任意の $\sigma > 0, t > 0$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(tx)}{x^2-\sigma^2-i\varepsilon}dx = \pi e^{it\sigma}. \tag{9.42}$$

証明 $f(z) = z/(z^2-\sigma^2-i\varepsilon)$ とおくと，この f は定理 4.35 の仮定をみたす．上半平面における極は $a_\varepsilon := \sqrt{\sigma^2+i\varepsilon}$ だけであり（$\mathrm{Re}\sqrt{\sigma^2+i\varepsilon} > 0$ とする），$\mathrm{Res}\,(a_\varepsilon, fe^{itz}) = e^{ita_\varepsilon}/2$．したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{itx}}{x^2-\sigma^2-i\varepsilon}dx = \pi i e^{ita_\varepsilon}.$$

一方，$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} a_\varepsilon = \sigma$ であるから

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{itx}}{x^2-\sigma^2-i\varepsilon}dx = \pi i e^{it\sigma}.$$

関数 $x\cos(tx)/(x^2-\sigma^2-i\varepsilon)$ は奇関数であるから，$\int_{-R}^{R} x\cos(tx)/(x^2-\sigma^2-i\varepsilon)dx = 0$．よって (9.42) が得られる． ∎

(9.42) によって

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} I^{\pm}_{\mathbf{p},\varepsilon}(\mathbf{x}) = -\frac{4m\pi^2}{|\mathbf{x}|}e^{\pm i|\mathbf{x}||\mathbf{p}|}.$$

ゆえに

$$K^{\pm}_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = -2m\frac{e^{\pm i|\mathbf{x}||\mathbf{p}|}}{4\pi|\mathbf{x}|}. \tag{9.43}$$

ちなみに（お話として読んでいただければよい）

$$\Delta := \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

とおくと，$K^{\pm}_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ は

$$(E(\mathbf{p}) + \Delta/2m)\,K^{\pm}_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

という超関数の意味での偏微分方程式をみたす．ただし，$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ は 3 次元のデルタ超関数である[14]．一般に，超関数方程式 $(E(\mathbf{p}) + \Delta/2m)\,G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ をみたす超関数 $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ を偏微分作用素 $E(\mathbf{p}) + \Delta/2m$ の**基本解**または**グリーン関数**とよぶ．超関数 $K^{\pm}_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ は $E(\mathbf{p}) + \Delta/2m$ のグリーン関数なのである．

---

[14] 描像では，$\delta(0) = +\infty$, $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = 0$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, $\int_{\mathbb{R}^3}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})d\mathbf{y} = 1$（これは厳密な定義ではない）．超関数については，たとえば，新井朝雄・江沢 洋『量子力学の数学的構造 I, II』（朝倉書店，1999）の付録 C を参照．

9.4.3 分散式

光の波束が物質によって散乱される現象や素粒子どうしの衝突の現象を定量的に記述するための基本量のひとつとして**散乱振幅** (scattering amplitude) とよばれる関数 $f(E)$ が定義される．ただし，$E>0$ は散乱される光または素粒子のエネルギーを表す変数である．物理的には，$f(E)$ の絶対値の 2 乗 $|f(E)|^2$ はエネルギー E の粒子が単位立体角内に散乱される確率を表す．多くの場合，f は，複素平面の適当な領域を定義域とする正則関数に拡張される．これもまた f で表す．

拡張された f の解析性に注目し，正則関数の理論を応用することにより，散乱振幅 f の実部と虚部に対して，f の具体的な形によらない一般的な関係式を導くことができる．この種の一般関係式は**分散式** (dispersion relation) とよばれる．ここでは最も簡単な型の分散式の例を 1 つ挙げる．

【定理 9.2】 複素関数 $f(E)$ は，集合 $\{E\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im}E\geq 0\}$ で定義された連続関数であるとし，実軸上で連続，上半平面 $\operatorname{Im}E>0$ で正則であるとする．さらに，ある定数 f_∞ があって，任意の $E\in\mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{R\to+\infty}\sup_{\theta\in\mathbb{R}}|f(E+Re^{i\theta})-f_\infty|=0$$

が成り立つとする．このとき，任意の $E\in\mathbb{R}$ に対して

$$\operatorname{Re}f(E)=\frac{1}{\pi}\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}f(E')}{E'-E}dE'+\operatorname{Re}f_\infty, \tag{9.44}$$

$$\operatorname{Im}f(E)=-\frac{1}{\pi}\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}f(E')}{E'-E}dE'+\operatorname{Im}f_\infty. \tag{9.45}$$

証明　(概略)　$g(E)=f(E)-f_\infty$ とおくと，g は $\operatorname{Im}E>0$ で正則であり，$\mathbb{R}$ 上で連続である．さらに $\lim_{R\to+\infty}\sup_{\theta\in\mathbb{R}}|g(E+Re^{i\theta})|=0$．そこで，$0<\varepsilon<R$，$|E|<R-\varepsilon$ として，閉積分路 $C_{R,\varepsilon}$ を次のようにとる：

$$[-R+E,E-\varepsilon]\to\{E+\varepsilon e^{i(\pi-\theta)}\mid\theta\in[0,\pi]\}$$
$$\to[E+\varepsilon,E+R]\to\{E+Re^{i\theta}\mid\theta\in[0,\pi]\}$$

経路 $C_{R,\varepsilon}$ に沿う線積分 $\int_{C_{R,\varepsilon}}g(E')/(E'-E)\,dE'$ は留数定理により 0 である．これから

$$\int_{E-R}^{E-\varepsilon}\frac{g(E')}{E'-E}dE'+\int_{E+\varepsilon}^{E+R}\frac{g(E')}{E'-E}dE'+\int_0^\pi g(E+Re^{i\theta})i\,d\theta$$

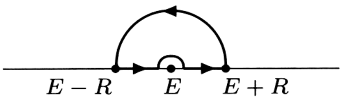


図 9.8 積分路 $C_{R,\varepsilon}$

$$= \int_0^{\pi} g(E+\varepsilon e^{i\theta}) i\, d\theta.$$

左辺の第 1 項と第 2 項の和は

$$\int_{E-R}^{E-\varepsilon} \frac{f(E')}{E'-E} dE' + \int_{E+\varepsilon}^{E+R} \frac{f(E')}{E'-E} dE'$$

に等しく，左辺の第 3 項は $R \to +\infty$ のとき，0 に収束する．また，右辺は $\varepsilon \downarrow +0$ のとき，$i\pi g(E) = i\pi(f(E) - f_{\infty})$ に収束する．したがって

$$f(E) = \frac{1}{i\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(E')}{E'-E} dE' + f_{\infty} \tag{9.46}$$

この式の両辺の実部と虚部を比べることにより，(9.44), (9.45) が導かれる． ∎

■ **例 9.9** ■ F を $[0,\infty)$ 上の関数とし，$\int_0^{\infty} |F(t)| dt < \infty$ であるとする．このとき

$$f(E) := \int_0^{\infty} F(t) e^{itE} dt$$

は $\mathrm{Im}\, E \geq 0$ に対して定義された連続関数であり，$\mathbb{R}$ 上で連続かつ $\mathrm{Im}\, E > 0$ において正則である（第 7 章演習問題 5 を参照）．したがって，この f に対して，定理 9.2 が適用できる．

定理 9.2 の証明の考え方は他の場合にも応用することができ，もっと一般的な分散式を導くことができる[15)]．

9.4.4 特異な磁場と有理型関数 —— アハラノフ–ボーム効果

3 次元空間 $\mathbb{R}^3 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid x_j \in \mathbb{R},\ j = 1,2,3\}$ において，磁

[15)] たとえば，M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics Vol. III: Scattering Theory, (Academic Press, 1979) の §XI.7 を参照．物理的な例と議論については，たとえば，G. Barton, Dispersion Techniques in Field Theory (Benjamin, 1965) や湯川秀樹・豊田利幸 編『量子力学 II』（岩波講座 現代物理学の基礎 4, 1978）の第 15 章を参照．

場 $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (B_1(\mathbf{x}), B_2(\mathbf{x}), B_3(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^3$ が存在している物理的状況を考える．電磁気学によれば，磁場 $\mathbf{B}$ には，**ベクトルポテンシャル**とよばれるベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (A_1(\mathbf{x}), A_2(\mathbf{x}), A_3(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^3$ が同伴し

$$B_1 = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2, \quad B_2 = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3, \quad B_3 = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$$

という関係が成り立つ．

いま，磁場 $\mathbf{B}$ は，2 次元平面 $\mathbb{R}^2 = \{\boldsymbol{r} = (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ と直交する方向，すなわち，x_3 軸の方向の向きをもつベクトル場であるとし，変数は $\boldsymbol{r}$ だけによるとする：$\mathbf{B}(\boldsymbol{r}) = (0, 0, B(\boldsymbol{r}))(B_1 = B_2 = 0, B_3 = B)$．$\mathbb{R}^2$ の点 $\mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^2$ $(n = 1, \cdots, N)$ (N は有限または可算無限；$\mathbf{a}_n \neq \mathbf{a}_m, n \neq m$) を任意に固定する．ただし，$N = \infty$ の場合は，$\{\mathbf{a}_n\}_n$ は集積点をもたないとする (i.e., $|\mathbf{a}_n| \to +\infty$ $(n \to \infty)$)．$\mathsf{S} := \{a_n \mid n = 1, \cdots, N\} \subset \mathbb{R}^2$ とおく．もし，すべての $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathsf{S}$ に対して，$B(\boldsymbol{r}) = 0$ ならば，磁場は S **に集中している**といい，このような磁場 $\mathbf{B}$ を**特異な磁場**とよぶ．この場合，$\mathbf{a}_n, n = 1, 2, \cdots$ を**磁場の特異点**という．

有理型関数の理論を応用することにより，**集積点をもたない任意の点の組をその特異点分布とする特異な磁場が存在する**ことを示そう．$\mathbf{a}_n$ を上述のものとし，$\mathbf{a}_n = (a_{n1}, a_{n2})$ に対応する複素平面の点を a_n とする：$a_n := a_{n1} + ia_{n2}$．ミッターク–レフラーの定理（定理 6.15）によって，$z = a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を極とする有理型関数が存在する．これを $f(z)$ とし

$$A_1(\boldsymbol{r}) := \operatorname{Im} f(z), \quad A_2(\boldsymbol{r}) := \operatorname{Re} f(z), \quad z = x + iy \tag{9.47}$$

によって，ベクトルポテンシャル

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, 0) \tag{9.48}$$

を定義する．関数 f は $\mathbb{C} \setminus \{a_n\}_n$ で正則であるから，コーシー–リーマンの方程式により

$$\partial_x A_2(\boldsymbol{r}) - \partial_y A_1(\boldsymbol{r}) = 0, \quad \partial_x A_1(\boldsymbol{r}) + \partial_y A_2(\boldsymbol{r}) = 0, \quad \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathsf{S} \tag{9.49}$$

が成り立つ．第 1 式は，$B(\mathbf{r}) = 0$, $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathsf{S}$ を意味する．ゆえに，(9.47), (9.48) によって定義されるベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ から定まる磁場は特異である．

C を区分的に連続微分可能な単純閉曲線で a_n とは交わらないものとするとき

$$\Phi_{\mathbf{A}} := \int_C (A_1 dx + A_2 dy) \tag{9.50}$$

を C の**内部** $C_{\rm int}$ **を貫く磁束**とよぶ．(9.47) を用いると

$$\Phi_{\mathbf{A}} = \mathrm{Im}\left(\int_C f(z)dz\right)$$

がわかる．他方

$$\gamma_n := \mathrm{Res}\,(a_n, f) \quad (a_n \text{ での } f \text{ の留数}) \tag{9.51}$$

とおけば

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = \sum_{a_n \in C_{\rm int}} \gamma_n$$

—— $C_{\rm int}$ にある f の極における留数の和 —— が成り立つ ($\sum_{a_n \in C_{\rm int}}$ は $a_n \in C_{\rm int}$ をみたす n についての和；そのような a_n が無い場合は，0 とする)．ゆえに

$$\Phi_{\mathbf{A}} = 2\pi \sum_{a_n \in C_{\rm int}} \mathrm{Re}\,\gamma_n. \tag{9.52}$$

こうして，f の留数の実部の物理的意味が明らかになる．すなわち，$\mathrm{Re}\,\gamma_n$ は点 a_n を貫く磁束を 2π で割ったものである．

ここで考察した，特異な磁場は，量子力学において，2 次元系における**アハラノフ–ボーム効果**とよばれる現象と密接に関わっている[16]．この現象も含めて，特異な磁場をもつ量子系はいろいろと興味深い性質を有している[17]

■ **例 9.10** ■ $f(z) = \sum_{n=1}^N \dfrac{\lambda_n}{z - a_n}$ $(N < \infty, \lambda_n \in \mathbb{R})$ とおくと，これは，$\mathbb{C}$ 上の有理型関数であり，$z = a_1, \cdots, a_N$ に 1 位の極をもつ．この場合

$$A_1(\boldsymbol{r}) = -\sum_{n=1}^N \frac{\lambda_n(y - a_{n2})}{|\boldsymbol{r} - \mathbf{a}_n|^2}, \quad A_2(\boldsymbol{r}) = \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_n(x - a_{n1})}{|\boldsymbol{r} - \mathbf{a}_n|^2}.$$

9.4.5 湯川ポテンシャル

素粒子は，生成したり，消滅したりすることが可能である．素粒子の生成・消

---

[16] 電子が磁場とは相互作用をしないにも関わらず，磁場の存在の効果が現れる現象．これは，電子がベクトルポテンシャルと相互作用を行うこと，そして，磁場よりもベクトルポテンシャルの方が根源的な対象であることを示す現象のひとつである．理論的にはゲージ理論とよばれる理論の実験的根拠のひとつを提供する．

[17] さらに詳しくは，荒木不二洋 編『数理物理への誘い 2』(遊星社，1997) の中の拙稿「ゲージ理論における正準交換関係の表現とアハラノフ–ボーム効果」(第 7 話)，江沢 洋 編『数理物理への誘い 3』(遊星社，2000) の中の拙稿「非単連結空間上のゲージ量子力学」(第 6 話)，拙著『量子現象の数理』(朝倉書店，2006) の第 3 章，3.6 節を参照．

滅を司る対象として構想されたのが**量子場** (quantum field) とよばれるものである．各素粒子あるいは素粒子の組に1つの量子場が同伴する．量子場を用いると，素粒子の種々様々な現象は，量子場どうしの相互作用として，より原理的・統一的に把握される[18)]．

原子核を構成する核子（陽子，中性子）とよばれる素粒子は，核力とよばれる力で引き合う．この力は，中間子とよばれる素粒子を核子どうしが交換しあうことによって生じるとされる[19)]．量子場の理論の観点からは，核子の量子場と中間子の量子場の相互作用によって，引力が生じると捉えることになる．この量子場の理論から，核力のポテンシャルは，底エネルギー領域では，近似的に

$$Y(\mathbf{x}) := -\frac{g^2}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{i\mathbf{kx}}}{\mathbf{k}^2+m^2}d\mathbf{k}, \quad \mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \tag{9.53}$$

で与えられることが導かれる ($\mathbf{kx} := \sum_{j=1}^3 k_jx_j$, $\mathbf{k}=(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{R}^3$)．ただし，$m>0$ は中間子の質量を表す定数であり，$g>0$ は核子と中間子の結合定数である．ベクトル $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ は，原点に静止している核子に対する，他の核子の位置ベクトルを表す．また，積分 $\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x}$ は広義積分 $\lim_{R\to\infty}\int_{|\mathbf{x}|\le R} d\mathbf{x}$ の意味でとる．(9.53) の右辺の積分は留数定理を用いて次のように計算される．

$$Y(\mathbf{x}) = -\frac{g^2}{4\pi}\frac{e^{-m|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|}. \tag{9.54}$$

証明　$\mathbf{x}$ の向きを $\mathbf{k}$-空間の第3軸の正の向きにとり，$\mathbf{k}=(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{R}^3$ を極座標

$$k_1 = k\sin\theta\cos\phi,\ k_2 = k\sin\theta\sin\phi,\ k_3 = k\cos\theta$$

で表す ($\theta\in(0,\pi), \phi\in[0,2\pi), k\in(0,\infty)$)．このとき

$$\begin{aligned}\int_{|\mathbf{x}|\le R}\frac{e^{i\mathbf{kx}}}{\mathbf{k}^2+m^2}d\mathbf{k} &= 2\pi\int_0^R dk\int_{-1}^1\frac{e^{ik|\mathbf{x}|t}k^2}{k^2+m^2}dt \\ &= \frac{4\pi}{|\mathbf{x}|}\int_0^R\frac{k}{k^2+m^2}\sin(k|\mathbf{x}|)\,dk.\end{aligned}$$

(4.59) より（いまの場合，積分区間は $[0,\infty)$ であることに注意）

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R\frac{k}{k^2+m^2}\sin k|\mathbf{x}|\,dk = \frac{1}{2}\pi e^{-m|\mathbf{x}|}.$$

---

18) 詳しくは，拙著『多体系と量子場』（岩波書店，2002），『フォック空間と量子場　上下』（日本評論社，2000）等を参照．

19) 日本の偉大な理論物理学者，湯川秀樹 (1907–1981) による (1935)．湯川は，中間子の存在を予言し，1949 年度のノーベル物理学賞に輝いた．

したがって，(9.54) が得られる． ∎

(9.54) の右辺の関数を**湯川ポテンシャル**という．

演習問題

1. $m > 0, \gamma \geq 0, k > 0$ を定数として，$t \in \mathbb{R}$ の関数 $X(t)$ を未知関数とする 2 階の微分方程式

$$m\frac{d^2X(t)}{dt^2} + \gamma\frac{dX(t)}{dt} + kX(t) = 0$$

を考える[20]．この微分方程式の初期値問題を以下の方法で解け．

$x_0 := X(0), v_0 := X'(0)$ とし，$\mu := \gamma/(2m), \omega := \sqrt{k/m}$ とおく．

(i) 複素数 z の 2 次方程式 $z^2 + 2\mu z + \omega^2 = 0$ の解を α, β とし ($|\alpha| \leq |\beta|$)

$$Y(t) := X'(t) - \beta X(t)$$

とおく．このとき

$$Y'(t) = \alpha Y(t) \cdots (*)$$

を示せ．

(ii) $y_0 := v_0 - \beta x_0$ とするとき，$(*)$ から，$Y(t) = y_0 e^{\alpha t}, t \in \mathbb{R}$ を導け．

(iii) 次の式を導け．

$$X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - \beta}\left\{x_0\left(\alpha e^{\beta t} - \beta e^{\alpha t}\right) + v_0\left(e^{\alpha t} - e^{\beta t}\right)\right\} & ;\ \alpha \neq \beta \\ e^{\alpha t}[(v_0 - \alpha x_0)t + x_0] & ;\ \alpha = \beta \end{cases}$$

注意：ここで指示した解法の利点のひとつは，α, β については，根と係数の関係だけを知っていればよいという点にある．この方法は，一般の n 階定数係数微分方程式

$$\frac{d^nX(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}X(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dX(t)}{dt} + a_0X(t) = 0$$

---

[20] これは，古典力学の文脈では，摩擦を伴う調和振動子がしたがう運動方程式である．$-\gamma X'(t)$ が摩擦力を表す．

に対しても拡張される（$a_0, \cdots, a_{n-1}$ は複素定数）．すなわち，n 次方程式 $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ の根を $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ とすれば

$$\left(\frac{d}{dt} - \alpha_n\right)\left(\frac{d}{dt} - \alpha_{n-1}\right)\cdots\left(\frac{d}{dt} - \alpha_1\right)X(t) = 0$$

が成り立つ[21)]．そこで，

$$Y_1(t) := X'(t) - \alpha_1 X(t),\ Y_2(t) := Y_1'(t) - \alpha_2 Y_1(t),$$
$$Y_3(t) := Y_2'(t) - \alpha_3 Y_2(t), \cdots, Y_{n-1}(t) := Y_{n-2}'(t) - \alpha_{n-1} Y_{n-2}(t)$$

とおけば，$Y_{n-1}'(t) = \alpha_n Y_{n-1}(t)$ が成り立つ．したがって，$Y_{n-1}(t) = Y_{n-1}(0)e^{\alpha_n t}$．これから，$Y_{n-2}(t)$ が求まり，順次，$Y_{n-3}(t), \cdots, Y_1(t)$ が求まることになるのである．読者は詳細を埋められたい．

2. $a, b \in \mathbb{R}$ を定数とする．2 つの未知関数 $X(t), Y(t)$ に関する連立微分方程式

$$\frac{dX(t)}{dt} = aX(t) + bY(t), \quad \frac{dY(t)}{dt} = -bX(t) + aY(t)$$

を以下の手順で解け．

(i) $Z(t) := X(t) + iY(t)$ とおけば

$$\frac{dZ(t)}{dt} = (a - ib)Z(t)$$

が成り立つことを示せ．

(ii) $Z(t) = Z(0)e^{(a-ib)t}$ を示せ．

(iii)

$$X(t) = e^{at}(X(0)\cos(bt) + Y(0)\sin(bt)),$$
$$Y(t) = e^{at}(Y(0)\cos(bt) - X(0)\sin(bt))$$

を証明せよ．

3. 次の関数 f を複素速度ポテンシャルとする流れの流線群を求めよ．

$$(1)\ f(z) = \sqrt{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \quad (2)\ f(z) = \cos^{-1} z.$$

---

21) 定数 $\lambda \in \mathbb{C}$ と微分可能な関数 $f(t)$ に対して，$\left(\dfrac{d}{dt} - \lambda\right)f(t) := \dfrac{df(t)}{dt} - \lambda f(t)$.

4. 量子力学の散乱理論において，散乱が起こる場合と起こらない場合における位相の差を表す量として**位相のずれ** (phase shift) とよばれる量 $\delta \in \mathbb{R}$ が導入される．質量が $m > 0$ の量子力学的粒子が底エネルギー領域で散乱される場合

$$e^{2i\delta} = -\frac{k + \sqrt{2mB}i}{k - \sqrt{2mB}i}$$

という式が近似式として導かれる．ただし，$k > 0$ は散乱粒子の運動量の大きさを表し，$B > 0$ は束縛エネルギーを表す（束縛状態が 1 つだけある場合）．

$$\delta = -\cot^{-1}\frac{\sqrt{2mB}}{k}$$

を示せ．

付録 A

写　像

この付録では，写像の一般概念について簡単にふれておく．集合論の初等的な事柄については既知とする．だが，読者の便宜のために，若干の記法について復習しておこう：

(i) x が集合 X の元（要素）であることを $x \in X$ あるいは $X \ni x$ と表す．

(ii) x が集合 X の元でないことは $x \notin X$ と表す．

(iii) 集合 A, B について，$A \subset B$ は A が B の部分集合であること（A の元はすべて B に含まれるということ）を表す．

(iv) $A \setminus B := \{a \in A \mid a \notin B\}$ （差集合）[1]．

(v) 集合 X の部分集合 A の補集合を A^c で表す：$A^c = X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}$．

A.1 定義と例

X, Y を空でない集合とする．

【定義 A.1】 X の各元 x に対して，Y の元 y をただ 1 つ定める対応（規則）$f : x \mapsto y$ を X から Y への**写像** (mapping) という．この場合，$y = f(x)$ と記し（x に対応する，Y の元），y を x に対する f の**像**という．X を f の**定義域** (domain) または**始域**，Y を f の**終域**という．f が X から Y への写像であることを $f : X \to Y$ と表す．対応関係を具体的に示したい場合には，

$$f : X \to Y;\ x \mapsto f(x)$$

[1] $A - B$ と記される場合もある．

と書く．X から X への写像を **X 上の写像**という．

■ **例 A.1** ■　$X = Y = \mathbb{R}$（実数全体）の場合．n を自然数とし，各 $x \in \mathbb{R}$ に実数 x^n を割り当てる対応 $f(x) = x^n$ は $\mathbb{R}$ 上の写像である．

一般に，$\mathbb{R}$ の部分集合 J から $\mathbb{R}$ への写像を，J を定義域とする **1 実変数実数値関数**という．

■ **例 A.2** ■　$X = \mathbb{R}^2, Y = \mathbb{R}$ の場合．n, m を自然数とする．各 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して実数 $x_1^n x_2^m$ を割り当てる対応 $f(x_1, x_2) = x_1^n x_2^m$ は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への写像である．

一般に，$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D から $\mathbb{R}$ への写像を，D を定義域とする **2 実変数実数値関数**という．

■ **例 A.3** ■　自然数 n に対して，n 個の実数の組の全体

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n) \mid x_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \cdots, n\}$$

を **n 次元実座標空間**とよぶ．$\mathbb{R}^n$ の各元 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ に実数 $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$（$\alpha_j$ は与えられた自然数）を割り当てる対応 $f(\mathbf{x}) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への写像である（$X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}$ の場合）．

一般に，$\mathbb{R}^n$ の部分集合 Ω から $\mathbb{R}$ への写像を，Ω を定義域とする **n 実変数実数値関数**という．

■ **例 A.4** ■　m, n を自然数，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ とする．m 個の写像 $f_j : \Omega \to \mathbb{R}$ が与えられたとする $(j = 1, 2, \cdots, m)$．このとき，$\mathbb{R}^n$ の Ω の各元 $\mathbf{x}$ に $\mathbb{R}^m$ の元 $(f_1(\mathbf{x}), \cdots, f_m(\mathbf{x}))$ を割り当てる対応 $f(\mathbf{x}) := (f_1(\mathbf{x}), \cdots, f_m(\mathbf{x}))$ は，Ω から $\mathbb{R}^m$ への写像である．この型の写像を Ω 上の（$\mathbb{R}^m$ 値）**ベクトル値関数**という．

X の任意の部分集合 $D \neq \emptyset$ に対して，D の元に対する，写像 $f : X \to Y$ の像の全体を $f(D)$ で表す：

$$f(D) := \{f(x) \mid x \in D\} \subset Y.$$

これを D の f による**像** (image)，または D に対する f の**値域** (range) という．X に対する f の値域 $f(X)$ を $\mathrm{R}(f)$ とも書く．

$A \neq \emptyset$ を X の部分集合とし，$f : X \to Y$ とするとき，各 $x \in A$ に対して，$f(x) \in Y$ を対応させると，これは A から Y への写像である．この写像を f の A への**制限**と呼び，記号的に $f|A$ で表す：$(f|A)(x) := f(x)$, $x \in A$.

写像 $f : X \to Y$ に対して，$X \subset W$ となる集合 W と写像 $g : W \to Y$ があって，$g|X = f$ が成立するとき，g は f の**拡大**，または**拡張**であるという．

■ **例 A.5** ■ $I_X : X \to X$, $I_X(x) := x$, $x \in X$ によって定義される写像 I_X（つまり，何も変えない写像）を X 上の**恒等写像** (identity mapping) という．

■ **例 A.6** ■ X から $\mathbb{R}$ への写像を ***X*** **上の実数値関数**という．

■ **例 A.7** ■ X から $\mathbb{C}$（複素数体）への写像を ***X*** **上の複素数値関数**という．

写像 $f : X \to Y$ に対して，直積集合 $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$（$X$ の元と Y の元の対の全体）の部分集合

$$G(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

を**写像 *f* のグラフ**という．

【定義 A.2】（写像の相等） 2 つの写像 $f : X \to Y$, $g : U \to V$（U, V は集合）が**等しい**というのは，$X = U$, $Y = V$ であって，かつすべての $x \in X$ に対して，$f(x) = g(x)$ が成り立つことである．このとき，$f = g$ と記す．

2 つの写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$（Z は集合）が与えられると，各 $x \in X$ に対して，Z の元 $g(f(x))$ が 1 つ定まる．したがって，この対応 $x \mapsto g(f(x))$ は X から Z への写像を定める．この写像を $g \circ f$ と書き，f と g の**合成写像**とよぶ：

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)), \quad x \in X.$$

一般に，$X_1, \cdots, X_{n+1} (n \in \mathbb{N})$ を集合とし，$f_i : X_i \to X_{i+1} (i = 1, \cdots, n)$ を写像とするとき，

$$(f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)(x) := f_n(f_{n-1}(\cdots(f_2(f_1(x)))\cdots)), \quad x \in X_1$$

によって定義される写像 $f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 : X_1 \to X_{n+1}$ を $f_1, \cdots, f_n$ の**合成写像**という．

A.2 写像の分類

写像を分類する上での基本的な概念を定義する．$f : X \to Y$ を写像とする．

$f(X) = Y$ のとき，f は**全射** (surjection)，または $\boldsymbol{Y}$ **の上への写像**であるという．

$x \neq x'$ $(x, x' \in X)$ ならば，常に $f(x) \neq f(x')$ であるとき，f は **1 対 1** または**単射** (injection) であるという．

■ **例 A.8** ■　$A \neq \emptyset$ を X の部分集合とし，写像 $i_A : A \to X$ を $i_A := I_X|A$ によって定義する．これは単射である．しかし，$A \neq X$ ならば，i_A は全射ではない．写像 i_A を A の**包含写像** (inclusion mapping) という．

$f : X \to Y$ が単射のとき，$f(X) = Z$ とすれば，Z から X の写像 $g : Z \to X$ を $g(y) = x$ によって定義できる．ただし，x は $f(x) = y$ となる $x \in X$ である（このような x は f の単射性により，y から一意的に決まる）．g を単射 f の**逆写像** (inverse mapping) と呼び，記号的に $g = f^{-1}$ と表す．

$f : X \to Y$ が単射のとき，逆写像 f^{-1} の定義域は $f(X)$ である．したがって，

$$f \circ f^{-1} = I_{f(X)}, \quad f^{-1} \circ f = I_X \tag{A.1}$$

が成り立つ．

■ **例 A.9** ■　X の任意の空でない部分集合 A に対して，包含写像 i_A の逆写像 $i_A^{-1} : A \to A$ は A 上の恒等写像である：$i_A^{-1} = I_A$．

全射かつ単射である写像を**全単射** (bijection) という．

■ **例 A.10** ■　恒等写像は全単射である．

次の定理は，与えられた写像が全単射であるかどうかを判定する上で有用である．

【定理 A.3】　写像 $f : X \to Y$ が全単射であるための必要十分条件は，写像 $g : Y \to X$ で

$$f \circ g = I_Y, \quad g \circ f = I_X \tag{A.2}$$

をみたすものが存在することである．この場合，$g = f^{-1}$ である．

証明　**（必要性）**　f は全単射であるとしよう．全射性より，$f(X) = Y$．これと (A.1) より，$g = f^{-1}$ として，(A.2) が成り立つ．

（十分性）　(A.2) が成り立つとしよう．このとき，第 1 式より，任意の $y \in Y$ に対して，$x = g(y)$ とおけば $f(x) = y$．したがって，f は全射である．$x \neq x'$,

$x, x' \in X$，とすれば，(A.2) の第 2 式により，$x = g(f(x)), x' = g(f(x'))$ であるから，$g(f(x)) \neq g(f(x'))$．これは $f(x) \neq f(x')$ を意味する． ∎

参考文献

複素解析学の基礎的な部分は，ヨーロッパにおいて，主にガウス，コーシー，リーマン，ヴァイエルシュトラースといった数学の巨匠たちによって，19 世紀末までに確立された．だが，もちろん，それで複素解析学の研究は終わったわけではなく，20 世紀を通しても，大きく発展し，現在でも数学や数理物理学における重要な研究分野のひとつを形成している．

「まえがき」で述べたように，本書は，現今では，大学の理工系の 4 年次くらいまでに学ぶべき複素解析学の内容を現代的な数理物理学への接続を念頭において論述したものである．言うまでもなく，この先には，さらに深く高度な複素解析学の理論がある．だが，大学院で複素解析学あるいはそれと密接に関わる分野を専攻しようとする人以外には，本書で修得した事柄を，いわば数学探究のための“核”のひとつとして保持しつつ，数学の他の分野や数理物理学の学習・研究を進めていくことをお勧めする．この場合，それと並行して，必要に応じて，複素解析学についての経験を広めかつ深めていく機会を逃さないことが肝要である．

上述のように，複素解析学の分野は比較的長い歴史をもつので，今日までに出版された，この分野の教科書ないし参考書は厖大な数にのぼる．そこで，参考文献については，筆者が学生時代に複素解析学を学ぶ上でお世話になった本や，本書を執筆する上で参照した書物あるいは読者がさらに複素解析学の学習・研究を深める上で参考になると思われる専門書をいくつか挙げるにとどめ，それらに簡単なコメントを付し，もって読者の今後の学習の便に供したい．

[1] アールフォルス，L.V.『複素解析』(笠原乾吉 訳)，現代数学社，1982.

[2] アルフケン，J.『基礎物理数学 2 関数論』(権平健一郎，神原武志，小山直人 共訳)，講談社，1978.

[3] Barton, G., Dispersion Techniques in Field Theory, Benjamin, 1965.

[4] 後藤憲一・山崎修一郎『詳解 電磁気学演習』, 共立出版, 1970.

[5] 林 実樹廣・長坂行雄『複素関数概論』, サイエンス社, 2003.

[6] 一松 信『多変数解析函数論』, 培風館, 1960.

[7] 今井 功『流体力学』, 岩波書店, 岩波全書 275, 1970.

[8] 今井 功『流体力学 (前編)』, 裳華房, 1973.

[9] 今井 功『等角写像とその応用』, 岩波書店, 1979.

[10] 梶原壌二『複素関数論』, 森北出版, 数学ライブラリー 2, 1968.

[11] I. L. Kantor, A. S. Solodovnikov『超複素数入門—多元環へのアプローチ—』(浅野 洋 監訳/笠原久弘 訳), 森北出版, 1999.

[12] 菊地定衛門『高階複素数論』, 恒星社厚生閣, 1990.

[13] クライツィグ, E.『技術者のための高等数学 4 複素関数論』(原書第 8 版, 近藤次郎・堀 素夫 監訳, 丹生慶四郎 訳), 培風館, 2003.

[14] 栗田 稔『現代数学における 複素数と複素関数』, 現代数学社, 数学リーブル 2, 1970.

[15] 楠 幸男『解析函数論』, 廣川書店, 1962.

[16] 楠 幸男『函数論—リーマン面と等角写像—』, 朝倉書店, 1973.

[17] Reed, M. and Simon, B., Methods of Modern Mathematical Physics Vol. III: Scattering Theory, Academic Press, 1979.

[18] 田村二郎『解析関数』(第 8 版), 裳華房, 1973.

[19] E. C. Titchmarsh, Introduction to the Theory of Fourier Integrals, Oxford University Press, 1937.

[20] 辻 正次『複素函数論』, 槙書店, 1968.

[21] 辻 正次『函数論　上下』(復刊), 朝倉書店, 2004.

[22] Whittaker, E.T. & Watson, G.N., A Course of Modern Analysis, Cambridge University Press, 1969 (第 4 版)

[23] 保江邦夫『数理物理学方法序説 1 複素関数論』, 日本評論社, 2000.

[24] 湯川秀樹・豊田利幸 編『量子力学 II』(岩波講座 現代物理学の基礎 [第 2 版]4), 1978.

本書に出てくる人名については,『岩波西洋人名辞典 (増補版)』(岩波書店, 1981) や『岩波数学辞典 第 3 版』(岩波書店, 1993) を参照した.

本 [1] は定評のある複素解析学の書物のひとつである．本書で論じることができなかった内容—等角写像に関する，より進んだ事柄，ディリクレ問題や楕円関数の理論等—も載っている．

教科書 [2] は，どちらかと言えば，物理学や工学の学生用として書かれた観のある複素関数論の本である．叙述の仕方は物理的・感覚的であり，この意味では，読みやすい．物理学への応用問題も多く載っている．だが，数学書のスタイルで書かれていないので，定理の成立条件等に関して，いまひとつ厳密さと明晰さに欠けるところがある．数学として書かれた複素関数論の本と併用して読むとよいかもしれない．

複素解析学の標準的な内容を扱った教科書として，[5], [13], [18] がある．技術者のために書かれた高等数学シリーズのひとつの巻である [13] は，例題と演習問題が豊富であること，およびポテンシャル論への応用をやや詳しく論じている点に特色がある．

いわゆる教科書風の本では，ページ数の制限もあって，概念の定義，命題あるいは定理の背景ないし根底にある数学的な着想や考え方の説明が欠落しがちである．この点を補ってくれる優れた本のひとつとして [14] がある．この本では，複素解析学の基本的な考え方や筋道が丁寧に解説されている．

複素解析学の高度な内容を含む本格的な専門書として [15], [16] がある．特に，後者は，本書では，ほんの入り口だけしか紹介できなかったリーマン面と等角写像の理論を詳しく論じている．

複素関数論の広範囲にわたる内容とともに，かなり高度な話題をも論じた本として，[20] がある．これは，総ページ数 585 という大著であるが，大学院で複素解析学を勉強しようという人にとっては，有用な書物であろう．この本は，事典的にも使えて便利である ([21] も参照)．

洋書であるが，大著 [22](総ページ数 608) は世界的な名著であり，複素解析学を基盤とする古典解析学にとってのバイブル的存在である．特に，超越関数（特殊関数）に関する詳細な論述は他に類をみない極めて優れたものになっている．実

は，この本は，筆者が学部2年のときに，物理数学の講義のテキストとして使われた．以来，この書物とのつきあいはずっと続いており，筆者の専門の研究の上でもたいへん役立っている．

等角写像の理論の流体力学への応用を詳しく論じた専門書として [9] がある．この本には，流体力学を専攻しようする学生にとっては必須の内容が書かれている．等角写像の理論の応用に興味のある数学者や数学学生にとっても有用であろう．流体力学全般については，[7]，[8] が参考になる．等角写像の電磁気学への応用については，たとえば，[4] の4章，§3 を参照．

本書の9章で少しふれた分散式の理論のもっと詳しい内容は，[3]，[17] の §XI.7，[19]，[24] の15章などに論じられている．ちなみに，[17] のシリーズは，全4巻からなり，現代的な数理物理学の研究における基本的文献となっている[1)]．第9章の内容と関連して，現代科学と複素解析学との関わりを見るには，雑誌「数理科学」(2003，Vol. 41, No.8) の特集「虚数のプロフィル」(サイエンス社発行) が参考になるかもしれない[2)]．

複素解析学は，ルベーグ積分論と超関数の理論を用いて再構成しなおすと，より包括的・一般的になるとともに多くの証明が簡潔になり，見通しがよくなる．この観点から書かれたユニークな本として [23] がある．

本書の第1章で簡単にふれたが，複素数のいわば "上位" に超複素数の体系が存在する．超複素数に関する解析学もたいへん興味深いものであり，数理物理学との関連においても重要である．この側面については，たとえば，[11]，[12]，[23] を参照．

本書で扱った複素解析学は基本的に1複素変数の複素関数に関するものである．実変数関数の理論に多変数関数の理論があるように，複素関数についても多変数関数の理論を構築することができる．その一端は，本書，第7章，7.7節でふれた (より詳しくは，たとえば，[6] や [10] を参照)．この理論は，数理物理学では，たとえば，量子場の理論に応用をもつ[3)]．

---

1) 他の3巻は次の通り：Reed, M. and Simon, B., Methods of Modern Mathematical Physics Vol. I: Functional Analysis, Academic Press, 1972 ; 同, Methods of Modern Mathematical Physics Vol. II: Fourier Analysis, Self-adjointness, Academic Press, 1975 ; 同, Methods of Modern Mathematical Physics Vol. IV: Analysis of Operators, Academic Press, 1978.

2) ここに収録されている拙稿「場の理論と虚数」(p.32〜38) は本書の第9章の内容を補ってくれるであろう．

3) 江沢 洋・新井朝雄『場の量子論と統計力学』(日本評論社，1988) の第2章，2.5節を参照．

演習問題の解答（略解）

他の数学の問題の場合と同様，本書の演習問題についても，それに対する解答の方法は1つとは限らない．したがって，以下に略述する解答はあくまでも解答例であり，他の解法もありうることを注意しておく．読者は，1つの問題に対して，いろいろな角度から検討されたい．

1章

1. $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とすれば，$1/z = (x - iy)/(x^2 + y^2)$．したがって，$\mathrm{Re}\,(1/z) = x/(x^2 + y^2)$．ゆえに，与えられた条件と $x^2 - ax + y^2 > 0$ が同値となる．これは $(x - a/2)^2 + y^2 > (a/2)^2$ と同値である．したがって，求める集合は，点 $a/2$ を中心とする半径 $a/2$ の円の外側の点すべてからなる集合である（図1）．

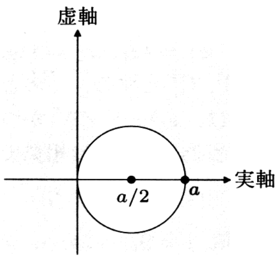


図1　問題1の集合

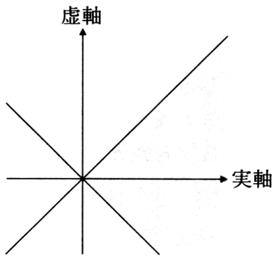


図2　問題2(i)の集合

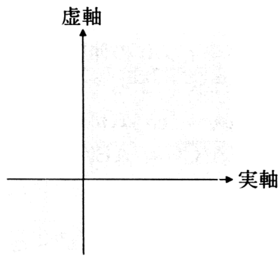


図3　問題2(ii)の集合

2. $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とすれば，$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$．したがって，$\mathrm{Re}\,(z^2) = x^2 - y^2$, $\mathrm{Im}\,(z^2) = 2xy$. ゆえに，次のようになる：

(i) $\mathrm{Re}\,(z^2) > 0$ をみたす点 z の集合は $|x| > |y|$ をみたす点 $z = x + iy$ の集合である（図2）．

(ii) $\mathrm{Im}\,(z^2) > 0$ をみたす点 z の集合は $xy > 0$ をみたす点 $z = x + iy$ の集合である（第1象限と第3象限; 図3）．

3. z 平面の虚軸上の点の像を考えればよい．そこで，$z = iy$ ($y \in \mathbb{R}$) とおくと，$f(iy) = 1/(1+iay) = (1-iay)/(1+a^2y^2)$．したがって，$f(iy) = u + iv$ ($u, v \in \mathbb{R}$) とおくと $u = 1/(1+a^2y^2) \cdots (*), v = -ay/(1+a^2y^2)$．これから，$u \neq 0$, $v = -ayu$, すなわち，$y = -v/au, u \neq 0$．これを $(*)$ に代入して，整理すれば，$u^2 + v^2 = u$ ($u \neq 0$) となる．したがって，$(u-1/2)^2 + v^2 = (1/2)^2$．よって，$z$ 平面の虚軸は，f によって，中心が $1/2$ で半径が $1/2$ の円（ただし，原点は除く）に写される．

注意：求めた集合が $a > 0$ によらないことにも注目せよ．

4. $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とすれば，$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$．したがって，次のようになる．

(i) $D_c = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid xy = c/2\}$．これは双曲線である．

(ii) $F_d = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x^2 - y^2 = d\}$．これも双曲線である．

5. $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とすれば，$f(z) = e^x e^{iy}$．したがって，次のようになる．

(i) $W_c = \{w = e^x e^{ic} \mid x \in \mathbb{R}\}$．これは，原点を始点とし，実軸と角度 c の傾きをもつ半無限直線を表す．

(ii) $X_d = \{e^d e^{iy} \mid y \in \mathbb{R}\}$．これは，原点を中心とする，半径 e^d の円を表す．

6. 平面上の点 P, Q に対して，P と Q を結ぶ線分を PQ と書き，その長さを $\overline{\mathrm{PQ}}$ と記す．3 角形の頂点を A, B, C とし，対応する複素数をそれぞれ，z_1, z_2, z_3 とする．倍率 $t > 0$ の伸張変換によって，これらの点はそれぞれ，$w_1 = tz_1$, $w_2 = tz_2$, $w_3 = tz_3$ によって表される点に写る．これらの点を A′, B′, C′ とする．このとき，$(w_2 - w_1)/(w_3 - w_1) = (z_2 - z_1)/(z_3 - z_1)$．これは，$\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{A}'$ かつ $\overline{\mathrm{A'B'}}/\overline{\mathrm{A'C'}} = \overline{\mathrm{AB}}/\overline{\mathrm{AC}}$ を意味する．したがって，$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ は相似である．

7. (i) $f(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$ ($\alpha_j \in \mathbb{R}, j = 0, \cdots, n, \alpha_n \neq 0$) とする．このとき，$f(z)^* = (\alpha_n z^n)^* + (\alpha_{n-1} z^{n-1})^* + \cdots + (\alpha_1 z)^* + \alpha_0^*$．他方，$(\alpha_j z^j)^* = \alpha_j^* (z^j)^* = \alpha_j (z^*)^j$．したがって，$f(z)^* = f(z^*)$.

(ii) $f(\alpha) = 0$ とする．したがって，$f(\alpha)^* = 0$．(i) により，左辺は $f(\alpha^*)$ に等しい．したがって，$f(\alpha^*) = 0$．ゆえに，α^* も方程式 $f(z) = 0$ の解である．

8. (i) $\sin(-z) = (e^{-iz} - e^{iz})/(2i) = -(e^{iz} - e^{-iz})/(2i) = -\sin z$．$\cos(-z)$ の場合も同様の変形による．

(ii) $(\sin z)^* = (e^{iz} - e^{-iz})^*/(2i)^* = ((e^{iz})^* - (e^{-iz})^*)/(-2i) = (e^{-iz^*} - e^{iz^*})/(-2i) = \sin z^*$．$(\cos z)^*$ の場合も同様.

(iii) 加法定理と $\cos\pi/2 = 0$, $\sin\pi/2 = 1$ による．

(iv) $\sin i = (e^{i^2} - e^{-i^2})/(2i) = (e^{-1} - e)/(2i) = (e^2 - 1)i/(2e)$．$\cos i$ についても同様．

9. (i) $e^{n\pi i} = (e^{\pi i})^n = (-1)^n$．(ii) $e^{n\pi i/2} = (e^{\pi i/2})^n = i^n$．

10. (i) $|-1| = 1$, $\log 1 = 0$, $\arg(-1) = \pi \pmod{2\pi}$ によって，$\log(-1) = i\pi + 2n\pi i = (2n+1)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$．

(ii) $|i| = 1$, $\log 1 = 0$, $\arg i = \pi/2 \pmod{2\pi}$ によって，$\log i = i\pi/2 + 2\pi i n = (2n + 1/2)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$．

(iii) (ii) を使うことにより，$i^i = e^{i\log i} = e^{i(2n+1/2)\pi i} = e^{-(4n+1)\pi/2}$ $(n \in \mathbb{Z})$．

(iv) (iii) を使うと，$(i^i)^i = e^{-i(4n+1)\pi/2} = e^{-i\pi/2} = -i$．

11. (i) $w = \sin^{-1} z$ とおくと，$\sin w = z$．したがって，$e^{iw} - e^{-iw} = 2iz$．そこで，$\alpha = e^{iw}$ とおくと，$\alpha^2 - 2iz\alpha - 1 = 0$．したがって，2 次方程式の根の公式により，$\alpha = iz + (1 - z^2)^{1/2}$ ($(1 - z^2)^{1/2}$ は主値ではなく，多価関数として考える)．したがって，$iw = \log(iz + (1 - z^2)^{1/2})$．

(ii) $w = \cos^{-1} z$ とおき，$\alpha = e^{iw}$ とすれば，(i) と同様にして，$\alpha^2 - 2z\alpha + 1 = 0$．したがって，$\alpha = z + (z^2 - 1)^{1/2}$．ゆえに，$iw = \log(z + (z^2 - 1)^{1/2})$．

(iii) $w = \tan^{-1} z$ とおくと，$z = \tan w = \sin w/\cos w = (e^{iw} - e^{-iw})/i(e^{iw} + e^{-iw})$．そこで，$\alpha = e^{iw}$ とおけば，$\alpha^2 = (i - z)/(i + z)$．したがって，$2iw = \log[(i - z)/(i + z)]$．

12. $f(z) = g(z)/h(z)$ と書ける．ただし，g, h は実数係数の多項式である．

(i) $f(z)^* = g(z)^*/h(z)^*$．問題 7-(i) によって，$g(z)^* = g(z^*), h(z)^* = h(z^*)$ であるので，$g(z)^*/h(z)^* = f(z^*)$．したがって，$f(z)^* = f(z^*)$．

(ii) $F(z) = f(z)e^{-zt}/(z - z^*)$ とおくと，(i) により

$$\frac{f(z)}{z - z^*}e^{-zt} + \frac{f(z^*)}{z^* - z}e^{-z^*t} = 2\,\mathrm{Re}\,F(z)$$

が成り立つ．一方，$F(z) = (u + iv)e^{-xt}e^{-iyt}/(2iy)$ である．これから，$\mathrm{Re}\,F(z) = e^{-xt}(v\cos ty - u\sin ty)/(2y)$ がわかる．したがって，問題の関係式が成立する．

13. 頂点 z_j の角度を $\angle z_j$ で表す．$z_3 - z_1 = R(z_2 - z_1)e^{i\theta}$ $(R > 0,\ 0 < \theta < \pi)$ として一般性を失わない．(描像的に言えば，辺 $[z_1 z_2]$ を角度 θ だけ反時計回りに回転すると，辺 $[z_1 z_3]$ と部分的に重なるということ．)

(**必要性**) $\triangle z_1 z_2 z_3$ が正 3 角形であるとする．このとき，$\angle z_1 = \angle z_2 = \angle z_3$．また，$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$．一方，$\angle z_1 = \arg[(z_3 - z_1)/(z_2 -$

$z_1)], \angle z_2 = \arg[(z_1 - z_2)/(z_3 - z_2)], \angle z_3 = \arg[(z_2 - z_3)/(z_1 - z_3)]$．したがって，$(z_3 - z_1)/(z_2 - z_1) = (z_1 - z_2)/(z_3 - z_2) = (z_2 - z_3)/(z_1 - z_3) \cdots (*)$．はじめの等式から

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 = 0 \cdots (**)$$

が導かれる．$(*)$ における他の等式からも同じ式が得られる．

（**十分性**）$(**)$ が成り立つとすると，$(*)$ が導かれる．$(*)$ の絶対値をとることにより得られる，$|z_1 - z_2|, |z_2 - z_3|, |z_3 - z_1|$ に関する連立方程式を解くと，$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ が得られる．したがって，$\triangle z_1 z_2 z_3$ は正 3 角形である．($(*)$ の偏角をとり，$\angle z_1 = \angle z_2 = \angle z_3$ を示してもよい.）

14. $z = re^{i\theta}\,(\theta \in \mathbb{R})$，$f(z) = u + iv$ とおくと $u = (r + 1/r)\cos\theta, v = (r - 1/r)\sin\theta$．したがって

$$\frac{u^2}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1.$$

これは楕円の方程式である．

15. 十分性は明らかであるから, 必要性だけを証明する．そこで, $g(\theta) = k$ (実定数) とする．両辺を微分することにより, $a\cos\theta - b\sin\theta + 2c\cos 2\theta - 2d\sin 2\theta = 0$．これがすべての θ について成立するから, $\theta = 0, \pi/2, \pi$ とすれば, $a + 2c = 0$, $-b - 2c = 0$, $-a + 2c = 0$．したがって, $a = 0$, $c = 0$, $b = 0$．ゆえに，$-2d\sin 2\theta = 0$．$\theta = \pi/4$ とすれば，$d = 0$.

別証：$g(\theta) = k$ の式で，$\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, \pi/4$ を代入して，a, b, c, d を求めてもよい．

16. (i) $z = re^{i\theta}$，$f(z) = u + iv$ とおくと，$u + iv = r^2 e^{2i\theta} + 2re^{i\theta}$ であるから, $u = r^2\cos 2\theta + 2r\cos\theta$, $v = r^2\sin 2\theta + 2r\sin\theta$.

(ii) $f(\mathsf{C}_r)$ が仮に円であるとすれば，$(u - a)^2 + (v - b)^2 = R^2$ となる実数 a, b と $R > 0$ が存在する．左辺 $= u^2 + v^2 - 2au - 2bv + a^2 + b^2$ であり，$u^2 + v^2 = r^4 + 4r^2 + 4r^3\cos\theta$ であることを用いると $(4r^3 - 4ar)\cos\theta - 4br\sin\theta - 2ar^2\cos 2\theta - 2br^2\sin 2\theta = k$．ただし，$k = R^2 - a^2 - b^2 - r^4 - 4r^2$．これがすべての $\theta \in \mathbb{R}$ について成り立つから，前問により，$4r^3 - 4ar = 0$, $b = 0$, $a = 0$ でなければならない．したがって，$r = 0$．だが，これは矛盾である．よって，$f(\mathsf{C}_r)$ は円ではない．

17. $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ とすれば

$$(f_A \circ f_B)(z) = \frac{af_B(z) + b}{cf_B(z) + d} = \frac{a(\alpha z + \beta) + b(\gamma z + \delta)}{c(\alpha z + \beta) + d(\gamma z + \delta)}$$

$$= \frac{(a\alpha + b\gamma)z + a\beta + b\delta}{(c\alpha + d\gamma)z + c\beta + d\delta}.$$

一方，$AB = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$. したがって，$(f_A \circ f_B)(z) = f_{AB}(z)$.

18. (i) $|z-a|^2 = |w-a|^2$ を計算し，$|z|^2 = |w|^2$ を用いると $z + z^* = w + w^*$. したがって，$\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\, w$. これと $|z|^2 = |w|^2$ を使うと，$(\mathrm{Im}\, z)^2 = (\mathrm{Im}\, w)^2$. したがって，$\mathrm{Im}\, z = \pm \mathrm{Im}\, w$. ゆえに，$z = w$ または $z = w^*$.

注意：問題の z, w は，幾何学的には，原点を中心とする円と実軸上の点 $a \neq 0$ を中心とする円の交点であるから，結果は，描像的には，ほとんど自明である（しかし，これは証明ではない）.

(ii) $|z-ia|^2 = |w-ia|^2$ を計算し，$|z|^2 = |w|^2$ を用いると $i(z-z^*) = i(w-w^*)$. したがって，$\mathrm{Im}\, z = \mathrm{Im}\, w$. これと $|z|^2 = |w|^2$ を使うと，$(\mathrm{Re}\, z)^2 = (\mathrm{Re}\, w)^2$. したがって，$\mathrm{Re}\, z = \pm \mathrm{Re}\, w$. ゆえに，$z = w$ または $z = -\mathrm{Re}\, w + i\, \mathrm{Im}\, w = -w^*$.

注意：この場合の z, w は，幾何学的には，原点を中心とする円と虚軸上の点 $ia \neq 0$ を中心とする円の交点である．したがって，(i) と同様，結果は，描像的には，ほとんど自明である.

19. $\alpha = w/z$ とおくと，$|w| = |z|$ より，$|\alpha| = 1$. また，$z + w = z(1+\alpha)$ によって，$(1/\sqrt{2})|1+\alpha| = 1$. したがって，$|1+\alpha|^2 = 2$. これは，$\alpha + \alpha^* = 0$ を意味する．したがって，$\alpha = ic$ $(c \in \mathbb{R})$ と書ける．$|\alpha| = 1$ より，$|c| = 1$. したがって，$c = \pm 1$. ゆえに，$w/z = i$ または $w/z = -i$.

20. (i) n に関する帰納で証明する．$n = 1$ のときは明らか．$n = m$ で問題の式が成立したとする．このとき，$\sum_{k=0}^{m} z^k = (z^m - 1)/(z-1) + z^m = (z^{m+1} - 1)/(z-1)$. したがって，$n = m+1$ のときも成立.

(ii) (i) より，$z^n - 1 = (z-1)(\sum_{k=0}^{n-1} z^k)$. これは $z = 1$ でも成り立つ．そこで，z のところに z/α $(\alpha \neq 0)$ を代入して整理すれば，求める式が得られる．$\alpha = 0$ の場合の式は自明.

21. $P(z) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k z^k$ $(\beta_n \neq 0)$ とする．$P(\alpha) = 0$ であるから，$P(z) = P(z) - P(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k (z^k - \alpha^k)$. 前問によって，$z^k - \alpha^k = (z-\alpha)(\sum_{j=1}^{k} z^{k-j}\alpha^{j-1})$. したがって，$Q(z) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \sum_{j=1}^{k} z^{k-j}\alpha^{j-1}$ とおけば，$P(z) = (z-\alpha)Q(z)$. しかも，明らかに，Q は $(n-1)$ 次の多項式である.

22. (i) 問題 20-(i) を $n - 1 = N$, $z = e^{ix}$ として応用すれば，$\sum_{n=0}^{N} e^{inx} = (e^{i(N+1)x} - 1)/(e^{ix} - 1) = e^{i(N+1)x/2}(e^{i(N+1)x/2} - e^{-i(N+1)x/2})/[e^{ix/2}(e^{ix/2} - e^{-ix/2})] = e^{iNx/2} \sin[(N+1)x/2]/\sin(x/2)$.

(ii) (i) の左辺と右辺の実部どうし，虚部どうしの相等による.

注意：(ii) は，複素数を使うと簡単に導ける等式の例であり，複素数の威力が実数値関数の領域で発揮される好例のひとつである．試しに，複素数を使わないで (ii) の等式を証明してみよ．

23. $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}, z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$ であるので

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1^* z_2 + z_1 z_2^* \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1||z_2|e^{i(\theta_2-\theta_1)} + |z_1||z_2|e^{i(\theta_1-\theta_2)} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|\cos(\theta_1 - \theta_2).\end{aligned}$$

24. $Ae^{i\mathbf{kx}} = |A|e^{i(a+\mathbf{kx})}$, $Be^{i\mathbf{k'x}} = |B|e^{i(b+\mathbf{k'x})}$ に注意し，前問を $z_1 = Ae^{i\mathbf{kx}}$, $z_2 = Be^{i\mathbf{k'x}}$ として応用すればよい．

25. $z = x + iy$ が上半平面であることは $y > 0$, $x \in \mathbb{R}$ と同値．$a = p + iq$ $(p \in \mathbb{R}, q > 0)$ とおくと

$$|z - a^*| = \sqrt{(x-p)^2 + (y+q)^2}, \quad |z - a| = \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2}.$$

$(y+q)^2 - (y-q)^2 = 4yq > 0$ であるから，$|z - a^*| > |z - a|$．したがって，$|f(z)| < 1\,(\mathrm{Im}\,z > 0)$．ゆえに，$f$ は上半平面を，原点を中心とする単位円内 $U_1(0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ に写す．これが全射であることを示すために，ζ を $U_1(0)$ に属する任意の点とする．このとき，$z = (a - a^*\zeta)/(1-\zeta) \cdots (*)$ とおけば，$f(z) = \zeta$ である．そこで，$\mathrm{Im}\,z > 0$ を示そう．$\zeta = u + iv$ $(u, v \in \mathbb{R})$ とおくと，直接計算により

$$\mathrm{Im}\,z = \frac{q(1 - u^2 - v^2)}{(1-u)^2 + v^2}.$$

いま $u^2 + v^2 < 1, q > 0$ であるから，$\mathrm{Im}\,z > 0$ である．以上から，f は上半平面から $U_1(0)$ 全体への単射であることがわかる．（単射性は，方程式 $(z-a)/(z-a^*) = \zeta$ の解がただ 1 つで，$(*)$ によって与えられることによる．）

2章

1. D の有界性により，ある正数 R が存在して，$|z| > R$ ならば $z \in D^c$．任意の正数 $r > 0$ に対して，$z_r := (r + R + 1)e^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ とおけば，$|z_r| = r + R + 1 > R$．したがって，$z_r \in D^c$．さらに，$|z_r| > r$ であり，$r > 0$ は任意であるから，D^c は有界ではない．

2. $|f(z) - w_0| = |f(z)^* - w_0^*|$ による．

3. $z = x + iy \neq 0, y = ax$ $(a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ とすれば，$z^*/z = (1 - ia)/(1 + ia)$．したがって，$y = ax$ として，z^*/z の $z = 0$ での極限値をとる場合，a が異なれば，その極限値も異なる．ゆえに，z^*/z は原点において極限値をもたない．

4. $\beta = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とすれば，$e^{\beta z} = e^{az}e^{ibz}$．$e^{az} = u(x,y) + iv(x,y)$ とすれば，$u(x,y) = e^{ax}\cos ay$, $v(x,y) = e^{ax}\sin ay$．微分積分学で学ぶように，これらの関数は $\mathbb{R}^2$ 上で連続である．したがって，定理 2.36-(ii) によって，e^{az} は $\mathbb{C}$ 上で連続である．

$e^{ibz} = e^{-by}\cos bx + ie^{-by}\sin bx$ であり，$e^{-by}\cos bx$ も $e^{-by}\sin bx$ も $\mathbb{R}^2$ 上で連続であるから，e^{ibz} は $\mathbb{C}$ 上で連続である．

以上の事実と系 2.38-(iii) によって，$e^{\beta z}$ は $\mathbb{C}$ 上で連続である．

5. $g_\pm(z) = \pm i\beta z$ とおけば，これらは $\mathbb{C}$ 上で連続であり，$\sin\beta z = (e^{g_+(z)} - e^{g_-(z)})/(2i)$ と書ける．したがって，e^z の連続性と系 2.38-(ii) により，$\sin\beta z$ は $\mathbb{C}$ 上で連続である．

$\cos\beta z = (e^{g_+(z)} + e^{g_-(z)})/2$ であるから，$\sin\beta z$ の場合と同様に，$\cos\beta z$ も $\mathbb{C}$ 上で連続である．

6. $\sinh\beta z = (e^{\beta z} - e^{-\beta z})/2$ と第 2 章問題 4 および系 2.38-(ii) による．$\cosh\beta z = (e^{\beta z} + e^{-\beta z})/2$ についても同様．

7. (i) $\log_\alpha z = u(x,y) + iv(x,y)$ とおくと，$u(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$, $v(x,y) = \arg z = \tan^{-1} y/x$ $(x > 0)$; $v(x,y) = \pi + \tan^{-1} y/x$ $(x < 0)$; $v(0,y) = \pi/2$ $(y > 0)$; $v(0,y) = -\pi/2$ $(y < 0)$．この u, v は，いずれも $\mathring{D}_\alpha$ 上で連続である．したがって，$\log_\alpha z$ も $\mathring{D}_\alpha$ 上で連続である．

(ii) $z_\alpha^\nu = e^{\nu \log_\alpha z}$ であるから，(i) と第 2 章問題 4 および合成関数の連続性に関する定理（系 2.38-(v)）により，z_α^ν は $\mathring{D}_\alpha$ 上で連続である．

8. (i) $(e^{iax} - 1)/x = (\cos ax - 1)/x + i\sin ax/x$.
一方，$\lim_{x\in\mathbb{R}, x\to 0}(\cos ax - 1)/x = 0$, $\lim_{x\in\mathbb{R}, x\to 0}\sin ax/x = a$.
したがって，$\lim_{x\in\mathbb{R}, x\to 0}(e^{iax} - 1)/x = ia$.

(ii) $(e^{iax} - 1 - iax)/x^2 = (\cos ax - 1)/x^2 + i(\sin ax - ax)/x^2$.
一方，$\lim_{x\in\mathbb{R}, x\to 0}(\cos ax - 1)/x^2 = -a^2/2$, $\lim_{x\in\mathbb{R}, x\to 0}(\sin ax - ax)/x^2 = 0$.
したがって，$\lim_{x\in\mathbb{R}, x\to 0}(e^{iax} - 1 - iax)/x^2 = -a^2/2$.

9. まず，$\beta = 1$ の場合を考える．$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおくと

$$\frac{e^z - 1}{z} - 1 = \frac{e^x(e^{iy} - 1 - iy)}{z} + \frac{(e^x - 1 - x)(1 + iy)}{z} + \frac{ixy}{z}.$$

$|1/z| = 1/|z| \le 1/|y|$, $|1/z| \le 1/|x|$, $|ixy| = |x||y| \le |z|^2$ を用いると

$$\left|\frac{e^z - 1}{z} - 1\right| \le e^x \left|\frac{e^{iy} - 1 - iy}{y}\right| + \left|\frac{e^x - 1 - x}{x}\right|(1 + |z|) + |z|.$$

$z \to 0$ のとき $x, y \to 0$ であり，前問 (i) により，$\lim_{y\to 0}(e^{iy}-1-iy)/y = 0$ であり，$\lim_{x\to 0}(e^x - 1 - x)/x = 0$ であるから，上式の右辺は $z \to 0$ のとき，0 に収束する．したがって，$\lim_{z\to 0}(e^z-1)/z = 1$.

一般の $\beta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ の場合は, $(e^{\beta z}-1)/z = \beta[(e^{\beta z}-1)/(\beta z)]$ と変形し, $z \to 0$ と $\beta z \to 0$ が同値であることに注意し, 前段の結果を使えば, $\lim_{z\to 0}(e^{\beta z}-1)/(\beta z) = 1$ であるから，$\lim_{z\to 0}(e^{\beta z}-1)/z = \beta$ となる．$\beta = 0$ のときは，自明.

10. $\sin\beta z/z = (e^{i\beta z}-1)/(2iz) - (e^{-i\beta z}-1)/(2iz)$. 前問により，$z \to 0$ のとき，右辺第 1 項は $i\beta/(2i) = \beta/2$ に，右辺第 2 項は $-(-i\beta)/(2i) = \beta/2$ に収束する．したがって，$\lim_{z\to 0}\sin\beta z/z = \beta$.

11. 加法定理により，$\cos\beta z = 1 - 2\sin^2\beta z/2$ であるから，$(\cos\beta z - 1)/z^2 = -(\beta^2/2)(\sin^2\beta z/2)/(\beta z/2)^2$. 前問により，$z \to 0$ のとき，右辺は $-\beta^2/2$ に収束する.

12. $g(z) = (z-\omega)f(z)/(z^3-1)$ とおく．$z^3-1 = (z-1)(z^2+z+1)$ と因数分解できる．$\omega^2+\omega+1 = 0$ であるから，$z^2+z+1 = z^2+z+1-(\omega^2+\omega+1) = (z-\omega)(z+\omega+1)$. したがって, $g(z) = f(z)/[(z-1)(z+\omega+1)]$. $\omega \neq 1$ であるから, g は $z = \omega$ の十分小さい近傍で連続である．したがって, $\lim_{z\to\omega} g(z) = g(\omega) = f(\omega)/[(\omega-1)(2\omega+1)]$. さらに, $(\omega-1)(2\omega+1) = 2\omega^2-\omega-1 = 2\omega^2+\omega^2 = 3\omega^2$. よって，題意が成立する.

13. (**必要性**) $z \in \bar{D}$ とする．このとき，点列 $z_n \in D$ で $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ となるものが存在する．これは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$n_0 \in \mathbb{N}$ があって，$n \geq n_0$ ならば，$|z_n - z| < \varepsilon$ を意味する．したがって，$z_n \in U_\varepsilon(z)\cap D$, $n \geq n_0$. ゆえに題意がしたがう.

(**十分性**) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $U_{1/n}(z)\cap D \neq \emptyset$ であるから, $z_n \in U_{1/n}(z)\cap D$ が存在する．このとき，$z_n \in D$ かつ $|z_n - z| < 1/n$. したがって，$\lim_{n\to\infty} z_n = z$. ゆえに，$z \in \bar{D}$.

3章

1. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とおくと，$\partial_x f = \partial_x u + i\partial_x v$, $\partial_y f = \partial_y u + i\partial_y v$. したがって，$\partial_x f = -i\partial_y f$ は，$\partial_x u + i\partial_x v = -i\partial_y u + \partial_y v$ を意味する．これは $\partial_x u = \partial_y v$, $\partial_y u = -\partial_x v$ を導く．したがって，u, v はコーシー–リーマンの方程式をみたす．しかも，$\partial_x u, \partial_y u, \partial_x v, \partial_y v$ は連続である．ゆえに，定理 3.3-(ii) によって，f は正則である.

2. $\tan z = \sin z/\cos z$ の定義域は $\cos z = 0$ となる点 z を $\mathbb{C}$ から除いた集合である．一方，$\cos z = 0$ をみたす z は $z = (2n+1)\pi/2, n \in \mathbb{Z}$ という複素数でつ

くされる．$\sin z, \cos z$ も $\mathbb{C}$ 上で正則であるから，定理 3.2-(iii) によって，$\tan z$ は $\mathbb{C}\setminus\{(2n+1)\pi/2 \mid n\in\mathbb{Z}\}$ 上で正則であり，$(\tan z)' = (\cos^2 z+\sin^2 z)/\cos^2 z = 1/\cos^2 z = \sec^2 z$.

3. $\cot z = \cos z/\sin z$ の定義域は $\sin z = 0$ となる点 z を $\mathbb{C}$ から除いた集合である．一方，$\sin z = 0$ をみたす z は $z = n\pi, n\in\mathbb{Z}$ という複素数でつくされる．$\sin z, \cos z$ も $\mathbb{C}$ 上で正則であるから，定理 3.2-(iii) によって，$\cot z$ は $\mathbb{C}\setminus\{n\pi \mid n\in\mathbb{Z}\}$ 上で正則であり，$(\cot z)' = (-\sin^2 z-\cos^2 z)/\sin^2 z = -1/\sin^2 z = -\mathrm{cosec}^2 z$.

4. $\tanh z = \sinh z/\cosh z$ の定義域は $\cosh z = 0$ となる点 z を $\mathbb{C}$ から除いた集合である．一方，$\cosh z = 0$（これは $e^{2z} = -1$ と同値）をみたす z は $z = (2n+1)\pi i/2, n\in\mathbb{Z}$ という複素数でつくされる．$\sinh z, \cosh z$ も $\mathbb{C}$ 上で正則であるから，定理 3.2-(iii) によって，$\tanh z$ は $\mathbb{C}\setminus\{(2n+1)\pi i/2 \mid n\in\mathbb{Z}\}$ 上で正則であり，$(\tanh z)' = (\cosh^2 z-\sinh^2 z)/\cosh^2 z = 1/\sinh^2 z = \mathrm{sech}^2 z$.

5. $\coth z = \cosh z/\sinh z$ の定義域は $\sinh z = 0$ となる点 z を $\mathbb{C}$ から除いた集合である．一方，$\sinh z = 0$（これは $e^{2z} = 1$ と同値）をみたす z は $z = n\pi i, n\in\mathbb{Z}$ という複素数でつくされる．$\sinh z, \cosh z$ も $\mathbb{C}$ 上で正則であるから，定理 3.2-(iii) によって，$\coth z$ は $\mathbb{C}\setminus\{n\pi i \mid n\in\mathbb{Z}\}$ 上で正則であり，$(\coth z)' = (\sinh^2 z-\cosh^2 z)/\sinh^2 z = -1/\sinh^2 z = -\mathrm{cosech}^2 z$.

6. 合成関数の微分法により

$$\partial_r u = (\cos\theta)u_x + (\sin\theta)u_y, \quad \partial_\theta u = -(r\sin\theta)u_x + (r\cos\theta)u_y,$$
$$\partial_r v = (\cos\theta)v_x + (\sin\theta)v_y, \quad \partial_\theta v = -(r\sin\theta)v_x + (r\cos\theta)v_y.$$

(i) u, v がコーシー–リーマンの方程式をみたすとしよう：$u_x = v_y, u_y = -v_x$. このとき，$\partial_r u = u_x\cos\theta - v_x\sin\theta$, $\partial_\theta v = -rv_x\sin\theta + ru_x\cos\theta$, $\partial_r v = v_x\cos\theta + u_x\sin\theta$, $\partial_\theta u = -ru_x\sin\theta - rv_x\cos\theta$. したがって，$\partial_r u = (1/r)\partial_\theta v$, $\partial_r v = -(1/r)\partial_\theta u\cdots(*)$.

逆に $(*)$ が成り立つとしよう．このとき，$(v_x+u_y)\sin\theta + (u_x-v_y)\cos\theta = 0$, $(v_y-u_x)\sin\theta + (v_x+u_y)\cos\theta = 0$. これから，$[(v_x+u_y)^2+(u_x-v_y)^2]\sin\theta = 0$, $[(v_x+y_y)^2+(u_x-v_y)^2]\cos\theta = 0$. これは，$(v_x+u_y)^2+(u_x-v_y)^2 = 0$ を意味する．したがって，$v_x+u_y = 0$, $u_x - v_y = 0$. ゆえに，u, v はコーシー–リーマンの方程式をみたす．

(ii) u, v が D 上で連続微分可能でコーシー–リーマンの方程式をみたすならば，定理 3.3-(ii) によって，f は D 上で正則であり，$f'(z) = u_x + iv_x$ が成り立つ．さらに，(i) より，$\partial_r u = u_x\cos\theta - v_x\sin\theta$, $\partial_\theta u = -ru_x\sin\theta - rv_x\cos\theta$. これを u_x, v_x の連立方

程式とみて解くと，$u_x = \cos\theta\,\partial_r u - (\sin\theta/r)\partial_\theta u$, $v_x = -\sin\theta\,\partial_r u - (\cos\theta/r)\partial_\theta u$ となる．したがって，$f'(z) = u_x + iv_x = e^{-i\theta}\left(\partial_r u - \frac{i}{r}\partial_\theta u\right)$ が成り立つ．

7. (i) $z = re^{i\theta}$（極形式）とすれば，$\log_\alpha z = \log r + i\theta$ $(0 < r,\ \alpha - \pi < \theta < \pi + \alpha)$．したがって，$u = \log r$, $v = \theta$．これから，$\partial_r u = 1/r$, $\partial_\theta u = 0$, $\partial_r v = 0$, $\partial_\theta v = 1$．ゆえに $\partial_r u = \partial_\theta v/r$, $\partial_r v = -\partial_\theta u/r$ $(= 0)$．よって，前問により，u, v はコーシー–リーマンの方程式をみたし，$\overset{\circ}{D}_\alpha$ で連続微分可能であるので，$\log_\alpha z$ は正則であり，$(\log_\alpha z)' = e^{-i\theta}/r = 1/z$.

(ii) $z_\alpha^\nu = e^{\nu \log_\alpha z}$ と (i) および合成関数の微分法により，z_α^ν は $\overset{\circ}{D}_\alpha$ 上で正則であり，$(z_\alpha^\nu)' = (\nu \log_\alpha z)' e^{\nu \log_\alpha z} = (\nu/z) z_\alpha^\nu = \nu z_\alpha^{\nu-1}$.

8. $\mathrm{p.v.}\, a^z = e^{z \operatorname{Log} a}$．これは，$\mathbb{C}$ 上の正則関数であり，

$$(e^{z \operatorname{Log} a})' = (\operatorname{Log} a) e^{z \operatorname{Log} a} = (\operatorname{Log} a)\mathrm{p.v.}\, a^z.$$

したがって，与式が得られる．

9. 仮定により，$u := (f - f^*)/2$, $v := (f - f^*)/(2i)$ は実数値の正則関数である．したがって，系 3.4 によって，定数 $c, d \in \mathbb{R}$ があって，$u(x,y) = c$, $v(x,y) = d$, $x + iy \in D$．ゆえに，$f(z) = c + iv$, $z \in D$．よって，f は定数である．

10. (i) $v_x = -6xy$, $v_{xx} = -6y$, $v_y = 3y^2 + a - 3x^2$, $v_{yy} = 6y$．したがって，$v_{xx} + v_{yy} = 0$．ゆえに v は調和関数である．

(ii) 求める正則関数を $f = u + iv$ とすれば，コーシー–リーマンの方程式により，$u_x = v_y = 3y^2 + a - 3x^2$, $u_y = -v_x = 6xy$．第 1 式より，$u = 3y^2 x + ax - x^3 + g(y)$ ($g(y)$ は y のみの関数)．これと第 2 式から，$g'(y) = 0$．したがって，$g(y) = c$．ただし，$c \in \mathbb{R}$ は定数．ゆえに，$f(z) = 3y^2 x + ax - x^3 + c + i(y^3 + ay - 3x^2 y) = -(x + iy)^3 + a(x - iy) + c = -z^3 + az + c$.

（別証） $x = (z + z^*)/2$, $y = (z - z^*)/(2i)$ を v に代入して，整理すれば，$v = (-z^3 + (z^*)^3 + az - az^*)/(2i) \cdots (*)$ となる．一方，$v = (f - f^*)/(2i)$ であるから，$f(z) = -z^3 + az + c \cdots (**)$（$c$ は実定数）とおけば，$(*)$ がみたされる．別に $v = (g - g^*)/(2i)$ となる正則関数 g があったとすれば，$f - g = f^* - g^*$ となるので，$f - g$ は実数値の正則関数である．したがって，それは，実定数 p でなければならない：$f - g = p$．したがって，$g(z) = f(z) - p$．よって，求める正則関数 f は $(**)$ の形に限定される．

11. (i) 関数 $z^{2n} = (x + iy)^{2n}$ は $\mathbb{C}$ 上の正則関数である．その実部を u_n，虚部を v_n とすれば，これらは調和関数である．2 項展開

$$(x + iy)^{2n} = \sum_{r=0}^{2n} {}_{2n}C_r\, x^{2n-r} (iy)^r$$

の右辺を r が偶数と奇数の部分に分けて計算することにより，$u_n = P_n, v_n = Q_n$ がわかる．したがって，P_n, Q_n は調和関数である．

(ii) z^{2n+1} も $\mathbb{C}$ 上の正則関数であり，$z^{2n+1} = (x+iy)(P_n + iQ_n)$ より，その実部と虚部はそれぞれ，f_n, g_n で与えられる．ゆえに題意がしたがう．

(別証) P_n, Q_n が互いに共役な調和関数であることを用いて，直接計算することにより，$(f_n)_{xx} + (f_n)_{yy} = 0$，$(g_n)_{xx} + (g_n)_{yy} = 0$ を示してもよい．

4章

1. (i) $\cos z = 0$ となるのは，$z = (2n+1)\pi/2, n \in \mathbb{Z}$ の場合に限り，$|(2n+1)\pi/2| > \pi/2 > 1$．したがって，関数 $z^n/\cos z$ は $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \pi/2\}$ で正則であり，この領域は原点を中心とする単位円を含むので，コーシーの積分定理により，$\int_C (z^n/\cos z)dz = 0$.

(ii) (i) と同様の考え方により，$z^n/\sin z$ は $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \pi\}$ で正則であることがわかる．この領域は原点を中心とする単位円を含むので，コーシーの積分定理により，$\int_C (z^n/\sin z)dz = 0$.

(iii) $f(z) = e^{az^n}/z$ は原点を除いて正則であり，$z = 0$ に 1 位の極をもつ．$\mathrm{Res}\,(0, f) = 1$ であるから，留数定理により，$\int_C (e^{az^n}/z)dz = 2\pi i$.

(iv) $C(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ とおく．このとき，

$$\int_C (z^*)^n dz = i\int_0^{2\pi} e^{-int}e^{it}dt = 2\pi i\delta_{n1}.$$

(v) $\sin(az)/z^2$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ で正則であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$C_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ とすれば，

$$\int_C \frac{\sin(az)}{z^2}dz = \int_{C_\varepsilon} \frac{\sin(az)}{z^2}dz = i\int_0^{2\pi} \frac{\sin(a\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}}dt.$$

ε は任意であったから，

$$\int_C \frac{\sin(az)}{z^2}dz = \lim_{\varepsilon\to 0} ia\int_0^{2\pi} \frac{\sin(a\varepsilon e^{it})}{a\varepsilon e^{it}}dt = ia\int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi ia.$$

(vi) $f(z) = e^{az}/[(nz+1)((n+1)z+1)]$ は，$z = -1/n, -1/(n+1)$ に 1 位の極をもち，それ以外の点では正則である．これらの極はいずれも，C の内部にある．したがって，留数定理により，$\int_C f(z)dz = 2\pi i[\mathrm{Res}\,(-1/n, f) + \mathrm{Res}\,(-1/(n+1), f)]$．一方，$\mathrm{Res}\,(-1/n, f) = -e^{-a/n}, \mathrm{Res}\,(-1/(n+1), f) = e^{-a/(n+1)}$．したがって，$\int_C f(z)dz = 2\pi i(e^{-a/(n+1)} - e^{-a/n})$.

2. $f(z)=1/(z^4+1)$ とおく（注意 4.3 を参照）.

$$z^4+1=(z^2+i)(z^2-i)=(z+\sqrt{-i})(z-\sqrt{-i})(z+\sqrt{i})(z-\sqrt{i}).$$

ただし，$\sqrt{-i}=e^{-\pi i/4}$, $\sqrt{i}=e^{\pi i/4}$（$\mathrm{Re}\sqrt{-i}>0$, $\mathrm{Re}\sqrt{i}>0$ という枝）．したがって，上半平面における，f の極は，$-\sqrt{-i}$ と $\sqrt{i}$ であり，いずれも 1 位の極である．簡単な計算により，$\mathrm{Res}\,(-\sqrt{-i},f)=1/(4i\sqrt{-i})$, $\mathrm{Res}\,(\sqrt{i},f)=1/(4i\sqrt{i})$. したがって，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}dx=2\pi i\left(\frac{1}{4i\sqrt{-i}}+\frac{1}{4i\sqrt{i}}\right)=\pi\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

3. $I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$, $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ とおく．したがって

$$I^2=\int_{\mathbb{R}_+}e^{-x^2}dx\int_{\mathbb{R}_+}e^{-y^2}dy=\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

（2 重積分）．そこで極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $r\in[0,\infty)$, $\theta\in[0,\pi/2]$ を行うと

$$I^2=\int_0^\infty dr\int_0^{\pi/2}e^{-r^2}r\,drd\theta=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-r^2}r\,dr=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^\infty=\frac{\pi}{4}.$$

したがって，$I=\sqrt{\pi}/2$.

4. $f(z)=e^{-z^{2n}}$ は整関数である．この関数を，原点を中心とする，半径が $R>0$ で中心角が $\pi/4n$ の扇型の周に沿って積分すれば，その積分は，コーシーの積分定理（定理 4.8）により，0 である．したがって

$$\int_0^R e^{-x^{2n}}dx+\int_0^{\pi/4n}e^{-R^{2n}e^{i2n\theta}}iRe^{i\theta}d\theta=\int_0^R e^{-ir^{2n}}e^{i\pi/4n}dr.$$

フレネルの公式（命題 4.37）の証明と同様に，$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi/4n}e^{-R^{2n}e^{i2n\theta}}iRe^{i\theta}d\theta=0$ を示すことができる．したがって，$e^{-i\pi/4n}\int_0^\infty e^{-x^{2n}}dx=\int_0^\infty e^{-ir^2}dr$. 両辺の実部と虚部を比較すれば，求める結果が得られる．

5. 最初の積分は，4.12.1 項の記号では，$F(\cos\theta,\sin\theta)=1/(a^2+\sin^2\theta)$ の場合である．したがって

$$g_F(z)=\frac{1}{a^2-\frac{(z-z^{-1})^2}{4}}\frac{1}{iz}=\frac{4zi}{(z^2-2az-1)(z^2+2az-1)}$$
$$=\frac{4zi}{(z-\alpha)(z-\beta)(z+\alpha)(z+\beta)}.$$

ただし，$\alpha = a + \sqrt{a^2+1}$, $\beta = a - \sqrt{a^2+1}$. したがって，原点を中心とする単位内にある，g_F の極は $\beta, -\beta$ であり，いずれも 1 位の極である．さらに，$\mathrm{Res}\,(\beta, g_F) = 2i/(\beta^2-\alpha^2)$, $\mathrm{Res}\,(-\beta, g_F) = 2i/(\beta^2-\alpha^2)$．したがって，$\int_0^{2\pi} 1/(a^2+\sin^2\theta)d\theta = (2\pi i)4i/(\beta^2-\alpha^2) = 2\pi/[a\sqrt{1+a^2}]$.

第 2 番目の積分は，4.12.1 項の記号では，$F(\cos\theta, \sin\theta) = 1/(a^2+\cos^2\theta)$ の場合である．したがって

$$g_F(z) = \frac{1}{a^2+\frac{(z+z^{-1})^2}{4}}\frac{1}{iz} = \frac{4z(-i)}{(z-i\alpha)(z-i\beta)(z+i\alpha)(z+i\beta)}.$$

したがって，原点を中心とする単位内にある，g_F の極は $i\beta, -i\beta$ であり，いずれも 1 位の極である．さらに，$\mathrm{Res}\,(i\beta, g_F) = 2i/(\beta^2-\alpha^2)$, $\mathrm{Res}\,(-i\beta, g_F) = 2i/(\beta^2-\alpha^2)$. したがって，$\int_0^{2\pi} 1/(a^2+\cos^2\theta)d\theta = (2\pi i)4i/(\beta^2-\alpha^2) = 2\pi/[a\sqrt{1+a^2}]$.

6. $az^2+bz+c = a(z-\alpha)(z-\beta)$ と書ける．ただし，$\alpha = (-b+\sqrt{4ac-b^2}\,i)/(2a)$, $\beta = -(b+\sqrt{4ac-b^2}\,i)/(2a)$．したがって，関数 $f(z) = 1/(az^2+bz+c)$ は $z = \alpha, \beta$ を除いて，正則であり，これらの点で 1 位の極をもつ．上半平面の極は α だけである．さらに $\mathrm{Res}\,(\alpha, f) = 1/[a(\alpha-\beta)] = 1/(\sqrt{4ac-b^2}\,i)$．また，$R$ が十分大きいとき，$R|f(Re^{i\theta})| \le R/(aR^2-|b|R-c) \to 0$ $(R\to\infty)$．したがって，定理 4.34 を応用することができるので

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{ax^2+bx+c}dx = 2\pi i\,\mathrm{Res}\,(\alpha, f) = \frac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}.$$

7. $1/[x(x^2+a^2)] = 1/(a^2x) - x/[a^2(x^2+a^2)]$ に注意すれば

$$I := \int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+a^2)}dx = \frac{1}{a^2}\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx - \frac{1}{a^2}\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx.$$

例 4.28 によって，$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \pi/2$．例 4.26 によって，$\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx = \pi e^{-a}/2$. したがって，$I = \pi/(2a^2) - \pi e^{-a}/(2a^2) = \pi(1-e^{-a})/(2a^2)$.

8. $f(z) = 1/(z^2+1)^n$ とおくと，$f(z) = 1/[(z+i)^n(z-i)^n]$ であるから，f は $z = \pm i$ を除いて正則であり，$z = \pm i$ は f の n 位の極である．したがって

$$\mathrm{Res}\,(i, f) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z+i)^{-n}\right)_{z=i}.$$

任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して $\frac{d^k}{dz^k}(z+i)^{-n} = (-1)^k n(n+1)\cdots(n+k-1)(z+i)^{-n-k}$ であるから

$$\mathrm{Res}\,(i, f) = \frac{(-i)n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!2^{2n-1}} = \frac{(-i)(2n-2)!}{((n-1)!)^2 2^{2n-1}}.$$

また, $R>1$ に対して, $|f(Re^{i\theta})| \le 1/(R^2-1)^n$. したがって, $\lim_{R\to\infty} RM_f(R) = 0$（$M_f(R)$ は 4.12.2 項で導入した数). したがって, 定理 4.34 を応用することができ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = 2\pi \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2 2^{2n-1}}.$$

左辺は $2\int_0^\infty 1/(x^2+1)^n dx$ と書けるので, 証明すべき式が得られる.

9. 仮定により, 定数 $c_1 \in \mathbb{C}$ があって, $f^{(n)}(z) = c_1$, $z \in D$. したがって, 定数 $a_0, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ があって, $f(z) = \frac{c_1}{n!}z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0$ と書ける. ゆえに, f は高々 n 次の多項式である（$c_1 \ne 0$ ならば, n 次の多項式).

10. $a \in \mathbb{C}$ を任意の点とする. $r > R + |a|, |z-a| = r$ ならば, $R < r - |a| \le |z| \le r + |a|$. したがって, $\max_{|z-a|=r} |f(z)| \le c(r+|a|)^n$. これとコーシーの評価式（定理 4.20）により, $|f^{(n+1)}(a)| \le (n+1)!c(r+|a|)^n/r^{n+1}$. そこで, $r \to \infty$ とすれば, $|f^{(n+1)}(a)| = 0$. したがって, $f^{(n+1)}(a) = 0$. $a \in \mathbb{C}$ は任意であったから, 前問により, f は高々 n 次の多項式である.

11. いずれの関数も $|z| < R$ で正則であり, $|z| \le R$ で連続であるから, $|z| = R$ 上で最大値を求めればよい.

(i) これは例 4.18 と同様. 最大値は $R(R^{n-1}+1)$. これを実現する点 $z_{\max}$ は $z = Re^{\theta}$ とするとき, $\cos[(n-1)\theta] = -1$ となる点であるから, $z_{\max} = Re^{(2\ell+1)\pi/(n-1)}$, $\ell = 0, \cdots, n-2$.

(ii) $z = Re^{i\theta}$ とすれば, $|f(z)| = R^n e^{R\cos\theta} \le Re^R$. 等号は $\theta = 0$ のとき, かつこのときに限る. したがって, 最大値は $R^n e^R$ で, これを実現する点は $z = R$.

(iii) $z = x + iy$, $x^2 + y^2 = R^2$ とすれば

$$|f(z)| = R^n e^{x^2-y^2} = R^n e^{R^2-2y^2} \le R^n e^{R^2}.$$

等号は $y = 0$ のとき, かつこのときに限る. したがって, 最大値は $R^n e^{R^2}$ で, これを実現する点は $z = R, -R$.

12. $f(z) = \sin z$ とすれば, これは整関数であり, $f(0) = 0$.

$$\begin{aligned}|f(z)| &= \frac{1}{2}|e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}| \le \frac{1}{2}(|e^{ix}e^{-y}| + |e^{-ix}e^{y}|) \\ &\le \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) = \cosh y \le \cosh R \quad (|z| \le R).\end{aligned}$$

したがって, シュヴァルツの補題（定理 4.28）により, $|f(z)| \le (\cosh R)|z|/R$.

5章

1. $f_n(0)=0$. $z\neq 0$ のとき

$$|f_n(z)|=\frac{n|z|}{|1+nz|^2}=\frac{1}{n}\frac{|z|}{|z+1/n|^2}\ \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\ 0\cdot\left(\frac{1}{|z|}\right)=0.$$

したがって，$\lim_{n\to\infty} f_n(z)=0$. 一方，$\sup_{z\in[0,1]}|f_n(z)|=\sup_{x\in[0,n]}x/(1+x)^2=1/4$（∵ 関数 $g(x)=x/(1+x)^2, x\in[0,n]$ は微分法を応用することにより，$x=1$ で最大値 $1/4$ をとることがわかる）．したがって，$f_n(z)$ は，$n\to\infty$ のとき，$[0,1]$ 上で 0 に一様収束はしない．

2. $f_n(z)=(-1)^n/(n+z)$ $(z=x+iy,\ x\geq-\sigma>-1)$ とおくと

$$\sup_{x\geq-\sigma}|f_n(z)|\leq\frac{1}{n+x}\leq\frac{1}{n-\sigma}\to 0\quad(n\to\infty).$$

また

$$|f_n(z)+f_{n+1}(z)|=\frac{1}{|(n+z)(n+1+z)|}\leq\frac{1}{(n-\sigma)^2}\quad\text{であり}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-\sigma)^2}<+\infty.$$

したがって，定理 5.14 によって，$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ は $x\geq-\sigma$ で一様収束する．

一方，$n_0>|z|$ となる自然数 n_0 と任意の $n\geq n_0$ に対して

$$|f_n(z)|=\frac{1}{|n+z|}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{|1+z/n|}\geq\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-|z|/n_0}.$$

したがって，$\sum_{n=n_0}^{\infty}|f_n(z)|\geq\dfrac{1}{1-|z|/n_0}\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty.$
ゆえに $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ は絶対収束はしない．

3. $|z|<1$ ならば，幾何級数の公式により，$\sum_{n=1}^{\infty}|(1-z)z^n|=|1-z|\cdot|z|(1-|z|)^{-1}$ であるから，$\sum_{n=1}^{\infty}(1-z)z^n$ は $|z|<1$ で絶対収束する．また，$z=1$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty}|(1-z)z^n|=0$ であるから，この場合も絶対収束である．そこで，$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(1-z)z^n$ とおくと，$|z|<1$ ならば，幾何級数の公式により $f(z)=z$. $z=1$ ならば，$f(z)=0$. したがって，$f(z)$ は S 上で連続ではない．一方，関数 $\sum_{n=1}^{N}(1-z)z^n$ は S 上で連続である．ゆえに，定理 5.10-(i) によって，$\sum_{n=1}^{\infty}(1-z)z^n$ は S 上で一様収束はしない．

4. (i) $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}z^n/n!, z\in\mathbb{C}$ を用いると

$$\sinh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n+(-1)^{n+1}z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(ii)

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n + (-1)^n z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n!)}.$$

5. (i) $f(z) = \tanh z = \sinh z/\cosh z$ であり，$\cosh z = 0 \iff z = (n+1/2)\pi i, n \in \mathbb{Z}$ であるから，f は $\mathbb{C} \setminus \{(n+1/2)\pi i \mid n \in \mathbb{Z}\}$ で正則である．特に $|z| < \pi/2$ で正則．

(ii) テイラー展開の定理により，$c_n = f^{(n)}(0)/n!$．一方，$f(z)\cosh z = \sinh z$．両辺を微分すれば，$f'(z)\cosh z + f(z)\sinh z = \cosh z$．したがって，$f'(z) + f(z)^2 = 1 \cdots (*)$．そこで，両辺を n 回微分して，$z = 0$ とすれば，$f^{(n+1)}(0) + \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r f^{(n-r)}(0) f^{(r)}(0) = 0$．ただし，${}_nC_r := n!/[(n-r)!r!]$．したがって，$(n+1)!c_{n+1} + \sum_{r=0}^{n} n!c_{n-r}c_r = 0$．ゆえに，$c_{n+1} = -\sum_{r=0}^{n} c_{n-r}c_r/(n+1)$．

(iii) n に関する帰納法で証明する．$c_0 = f(0) = 0$ であるから，$n = 0$ の場合は成立する．$n = 0, 1, \cdots, k$ の場合に $c_{2k} = 0$ が成り立つとする．このとき，(ii) の漸化式により，$c_{2(k+1)} = -\sum_{r=0}^{2k+1} c_{2k+1-r}c_r/(2k+2)$．帰納法の仮定により，右辺の和で残るのは r が奇数の項だけである．だが，r が奇数の場合，$2k+1-r$ は $2k$ 以下の偶数であるから，帰納法の仮定により，$c_{2k+1-r} = 0$．したがって，$c_{2(k+1)} = 0$．ゆえに，$n = k+1$ の場合も成立する．

(iv) (iii) により，$f(z) = c_1 z + c_3 z^3 + \cdots$．上の $(*)$ により，$f'(0) = 1$．したがって，$c_1 = 1$．また，(ii) の漸化式により，$c_3 = -c_1^2/3 = -1/3$．ゆえに，$f(z) = z - z^3/3 + \cdots$．

6. (i) $D = \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$, $f(z) = \sqrt{1-z}, z \in D$ とおく．$F(z) = \sqrt{z}, g(z) = 1-z$ とおけば，$f(z) = F(g(z))$ と書けるので，第 3 章の演習問題 7-(ii) と合成関数の微分法により，$f(z)$ は D 上で正則であり，$f'(z) = -\frac{1}{2}(1-z)^{-1/2} \cdots (*)$ となる．$|z| < 1$ は D に含まれるので

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n, \quad |z| < 1$$

とテイラー展開できる（収束は絶対収束）．$(*)$ から，帰納的に

$$f^{(n)}(z) = -\frac{(2n-3)!!}{2^n}(1-z)^{-(2n-1)/2}, \quad n \geq 2$$

を証明することができる．したがって，特に，$f^{(n)}(0) = -(2n-3)!!/2^n$，$n \geq 2$; $f'(0) = -1/2, f(0) = 1$．ゆえに題意の整級数展開が得られる．

(ii) $c_0 = 1, c_1 = -1/2, c_n = -\frac{(2n-3)!!}{2^n n!}$, $n \geq 2$ とおけば，(i) より，$\sqrt{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$，$|z| < 1$．一方，$c_n < 0, n \geq 1$ に注意すれば，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| = 2 - \sum_{n=0}^{N} c_n = 2 - \lim_{x \uparrow 1} \sum_{n=0}^{N} c_n x^n$$
$$\leq 2 - \lim_{x \uparrow 1} \sqrt{1-x} = 2.$$

N は任意であるから，$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < +\infty$．したがって，ヴァイエルシュトラースの M 判定法（定理 5.13）により，$h(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は $|z| \leq 1$ において，一様絶対収束する．ゆえに，h は $|z| \leq 1$ で連続関数である（もちろん，$|z| < 1$ では正則）．$|z| = 1$ をみたす任意の z に対して，$z_n = (1 - 1/n)e^{i \arg z}$ $(n \in \mathbb{N})$ とすれば，$|z_n| < 1$ であり，$\lim_{n\to\infty} z_n = z$．すでに知っているように，$h(z_n) = \sqrt{1-z_n}$．そこで，$n \to \infty$ とし，$h(z)$ と $\sqrt{1-z}$ の $|z| \leq 1$ での連続性を使えば，$h(z) = \sqrt{1-z}$ が得られる．よって，題意が成立する．

7. $f(z) = (1-z)^{-1/2}$ とおくと，これは $|z| < 1$ で正則であるので

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad |z| < 1$$

とテイラー展開できる（収束は絶対収束）．前問と同様にして，帰納的に

$$f^{(n)}(z) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}(1-z)^{-(2n+1)/2}, \quad n \geq 1$$

が証明される．したがって，$f^{(n)}(0) = (2n-1)!!/2^n$．また，$f(0) = 1$．ゆえに，題意にいう整級数展開が得られる．

8. $|z| < 1$ ならば，$f(z) := (1+z)^\nu = e^{\nu \mathrm{Log}\,(1+z)}$．したがって，$f'(z) = [\nu/(1+z)]e^{\nu \mathrm{Log}\,(1+z)} = \nu(1+z)^{\nu-1}$．したがって，順次，微分を繰り返せば

$$f^{(n)}(z) = \nu(\nu-1)\cdots(\nu-n+1)(1+z)^{\nu-n} = n! \begin{pmatrix} \nu \\ n \end{pmatrix} (1+z)^{\nu-n}$$

が得られる．特に，$f^{(n)}(0) = n! \begin{pmatrix} \nu \\ n \end{pmatrix}$．ゆえに，$z = 0$ でのテイラー展開は題意の式を与える．

9. $f(z) := z_\alpha^\nu = e^{\nu \log_\alpha z}$ は $\mathbb{C} \setminus \{re^{i(\pi+\alpha)} \mid r \geq 0\}$ で正則であり，前問と同様にして

$$f^{(n)}(z) = n! \begin{pmatrix} \nu \\ n \end{pmatrix} z_\alpha^{\nu-n}$$

が得られる．したがって，特に，$f^{(n)}(a)=n!\begin{pmatrix}\nu\\n\end{pmatrix}a_\alpha^{\nu-n}$．ゆえに，$f$ の点 a でのテイラー展開は求める式を与える．

10. (i) $f(z)=\mathrm{Log}\,(1-z)$ とおくと，これは $|z|<1$ で正則であるから

$$\mathrm{Log}\,(1-z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n,\quad |z|<1$$

とテイラー展開できる（収束は絶対収束）．$f(0)=0$ であり，$f'(z)=-1/(1-z)$．したがって，$f^{(n)}(z)=-(n-1)!/(1-z)^n$．特に，$f^{(n)}(0)=-(n-1)!$．ゆえに題意の整級数展開が得られる．

(ii) (i) の式の z に $-z$ を代入すれば，$|z|<1$ に対して

$$\mathrm{Log}\,(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n,\quad |z|<1.$$

したがって，$|z|<1$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}\,\frac{1+z}{1-z}&=\mathrm{Log}\,(1+z)-\mathrm{Log}\,(1-z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^n\\&=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}\quad\text{（偶数冪の項は消し合う）}.\end{aligned}$$

11. $\cos z=\sin(z+\pi/2)\cdots(*)$ と書ける．したがって，$\cos z=0\iff\sin(z+\pi/2)=0\iff z+\pi/2=n\pi, n\in\mathbb{Z}$（例 5.12）$\iff z=(n-1/2)\pi, n\in\mathbb{Z}$．$\cos z$ の零点の単純性は $(*)$ と $\sin z$ の零点の単純性による．

12. (i) $I:=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha(x-\beta)^2}dx$ とおき，$\beta=c+id$ $(c,d\in\mathbb{R})$ とする．変数変換：$x\to x-c$ を行うことにより，$I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha(x-id)^2}dx$．$d=0$ の場合は題意が成立する．そこで，$d\neq0$ とする．まず，$d>0$ の場合を考え，図 4 のような矩形閉曲線をとり，これを C とする．

関数 $e^{-\alpha z^2}$ は z の整関数であるから，コーシーの積分定理により，$\int_C e^{-\alpha z^2}dz=0$．一方

$$\int_C e^{-\alpha z^2}dz=\int_{-R}^{R}e^{-\alpha(x-id)^2}dx+I_{R,+}+\int_{R}^{-R}e^{-\alpha x^2}dx+I_{R,-}.$$

ただし，$I_{R,+}:=\int_{-d}^{0}e^{-\alpha(R+iy)^2}i\,dy$, $I_{R,-}:=\int_{0}^{-d}e^{-\alpha(-R+iy)^2}i\,dy$．したがって

$$\int_{-R}^{R}e^{-\alpha(x-id)^2}dx=\int_{-R}^{R}e^{-\alpha x^2}dx-I_{R,+}-I_{R,-}.$$

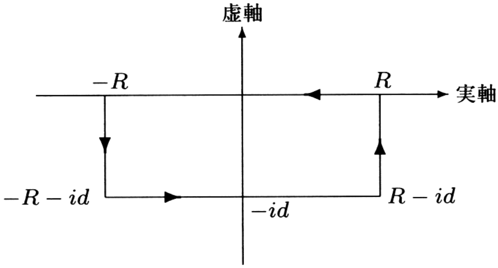


図 4　問題 12-(i) のための積分路

$\alpha = a + ib$ $(a > 0, b \in \mathbb{R})$ とおくと，$|e^{-\alpha(\pm R+iy)^2}| \le e^{-aR^2} e^{2|b||y|R} e^{ay^2} \le e^{-aR^2} e^{2d|b|R} e^{ad^2}$．したがって，$|I_{R,\pm}| \le de^{-aR^2+2d|b|R} e^{ad^2} \to 0$ $(R \to \infty)$ $(\because$ $-aR^2 + 2d|b|R = -aR^2(1-2d|b|/R) \le -aR^2(1-2d|b|/R_0)$ $(R \ge R_0 > 2d|b|)$．したがって，$e^{-aR^2+2d|b|R} \le e^{-a(1-2d|b|/R_0)R^2} \to 0$ $(R \to \infty))$．ゆえに　$I = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-\alpha(x-id)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ がしたがう．

$d < 0$ の場合には，$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x+i|d|)^2} dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^*(x-i|d|)^2} dx\right)^*$ と変形し，前半の結果を使えば $(\mathrm{Re}\,\alpha^* = \mathrm{Re}\,\alpha > 0$ に注意)，右辺は $\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^* x^2} dx\right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ に等しい．したがって，この場合も，$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$.

別証：積分路を $-R \to R \to R + i|d| \to -R + i|d| \to -R$ という矩形曲線（その像は $\mathbb{R} \cup$（上半平面）の矩形集合）にとり，前半と同様の議論をしてもよい．

(ii) $J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2+\gamma x} dx$ とおく．被積分関数の肩は $-\alpha x^2 + \gamma x = -\alpha[x - \gamma/(2\alpha)]^2 + \gamma^2/(4\alpha)$ と変形できる．したがって

$$J = e^{\gamma^2/(4\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x-\frac{\gamma}{2\alpha})^2} dx.$$

これと (i) により，$J = e^{\gamma^2/(4\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} = e^{\gamma^2/(4\alpha)} \sqrt{\pi}/\sqrt{\alpha}$　（例 5.8 を参照）．

13. (i) 定理 5.31 により，$N_{fg}(C_{\mathrm{int}}) = (2\pi i)^{-1} \int_C (fg)(z)/(fg)'(z) dz \cdots (*)$．一方，$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ であるから，$(fg)(z)/(fg)'(z) = f'(z)/f(z) + g'(z)/g(z)$．したがって

$$(*) \text{ の右辺} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g'(z)}{g(z)} dz = N_f(C_{\mathrm{int}}) + N_g(C_{\mathrm{int}}).$$

ゆえに題意が証明された．

(ii) n に関する帰納法による．$n = 2$ のときは，(i) により成立．そこで $n = m$ のとき成立したとする．このとき，$N_{f_1\cdots f_{m+1}}(C_{\mathrm{int}}) = N_{(f_1\cdots f_m)\cdot f_{m+1}}(C_{\mathrm{int}}) =$

$N_{f_1\cdots f_m}(C_{\mathrm{int}})+N_{f_{m+1}}(C_{\mathrm{int}})$（$n=2$ の場合を適用）．帰納法の仮定により，右辺第 1 項は $\sum_{j=1}^{m} N_{f_j}(C_{\mathrm{int}})$ に等しい．ゆえに，証明すべき式は $n=m+1$ でも成立する．

14. $f(z)=z^n, g(z)=a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ $(a_j\in\mathbb{C},\ j=0,\cdots,n-1)$ とおく．明らかに f の零点の個数は n 個である．任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して

$$|g(z)|\le|a_{n-1}||z|^{n-1}+\cdots+|a_1||z|+|a_0|.$$

$j=0,1,\cdots,n-1$ に対して，$|a_j||z|^j/|z|^n\to 0\,(|z|\to\infty)$．したがって，ある定数 $R_j>0$ があって，$|z|\ge R_j$ ならば，$|a_j||z|^j/|z|^n<1/(2n)$ とできる．そこで，$R=\max_{j=0,\cdots,n-1}R_j$ とすれば $|z|\ge R$ ならば，$|a_j||z|^j<|z|^n/(2n)$，$j=0,1,\cdots,n-1$．したがって，$|g(z)|<n\cdot|z|^n/(2n)=|z|^n/2<|f(z)|$．ゆえにルーシェの定理（定理 5.35）により，任意の $r\ge R$ に対して，$|z|<r$ に含まれる $f+g$ の零点の個数は f の零点の個数 n に等しい．$r\ge R$ は任意であったから，$f+g$ の $\mathbb{C}$ における零点の個数，すなわち，n 次方程式 $z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$ の根の個数は重複を含めて n 個である．

6 章

1. (i) f の $z=0$ でのローラン展開は

$$f(z)=z^m\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{\ell!z^{k\ell}}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{\ell!}\cdot\frac{1}{z^{k\ell-m}}.$$

$k\ell-m\ge 1$ となる ℓ は無限個存在するので，$z=0$ は真性特異点である．

(ii) (i) のローラン展開で z^{-1} の係数を c_{-1} とすれば，$\int_C f(z)dz=2\pi ic_{-1}$．$k\ell-m=1$ となる $\ell\in\mathbb{N}$ があるのは，$(m+1)$ が k の自然数倍であるとき，かつこのときに限る．この場合，$c_{-1}=1/[(m+1)/k]!$．そうでない場合は，$c_{-1}=0$．ゆえに $(m+1)/k\in\mathbb{N}$ のとき，$\int_C f(z)dz=(2\pi i)/[(m+1)/k]!$；$(m+1)/k\notin\mathbb{N}$ のとき，$\int_C f(z)dz=0$．

2. (i) $(e^{\beta z}-1)/z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^n z^{n-1}}{n!}$，$z\ne 0$ であるので，その主要部は 0 である．

(ii) $\sinh\beta z/z=\beta\sum_{n=0}^{\infty}(\beta z)^{2n}/(2n+1)!$，$z\ne 0$ であるので，その主要部は 0 である．

(iii) $(1-\cosh\beta z)/z^2=-\beta^2\sum_{n=1}^{\infty}(\beta z)^{2n-2}/(2n)!$，$z\ne 0$ であるので，その主要部は 0 である．

3. 第 5 章演習問題 10-(i) により，$\dfrac{\log(1-z)}{z}=-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n}$，$0<|z|<1$ であるから，その主要部は 0 である．

4. $\dfrac{a^z - b^z}{z} = \dfrac{e^{z\mathrm{Log}\,a} - e^{z\mathrm{Log}\,b}}{z} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(\mathrm{Log}\,a)^n - (\mathrm{Log}\,b)^n]z^{n-1}}{n!}$ であるから，その主要部は 0 である．

5. ● **(6.26) 式の証明.** $f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$ とおくと，f は $\mathbb{C} \setminus \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ で正則である．また，$f(z) = (z - \sin z)/(z \sin z) = (z/3! + \cdots)/(\sin z/z)$ であるから，$\lim_{z\to 0} f(z) = 0$．したがって，$z = 0$ は f の除去可能特異点である．ゆえに，f は $f(0) = 0$ である有理型関数とみなせる．すると，f の極は，$z = n\pi, n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ である．いずれも 1 位であり，$z = n\pi$ での留数 γ_n は $\gamma_n = \lim_{z\to n\pi}(z - n\pi)/\sin z = (-1)^n$．ゆえに，$f$ の $z = n\pi$ における主要部は $(-1)^n/(z - n\pi)$ である．曲線 C_N を例 6.8 のものとすれば，例 6.8 と同様にして，定理 6.14 の条件がみたされることがわかる[4]．したがって

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' (-1)^n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) \cdots (*) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right) = 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - (n\pi)^2}.
\end{aligned}
$$

ゆえに (6.26) 式が得られる．∎

● **(6.27) 式の証明.** $\cos z = \sin(z + \pi/2)$ に注意すれば，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\cos z} &= \frac{1}{\sin(z + \pi/2)} \\
&= \frac{1}{z + \pi/2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' (-1)^n \left(\frac{1}{z + (\pi/2) - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) \text{（上の } (*) \text{ を用いる）} \\
&= \frac{1}{z + \pi/2} + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \left(\frac{1}{z + (\pi/2) - n\pi} + \frac{1}{z + (\pi/2) + n\pi} \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{z + (\pi/2) - n\pi} + \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{z + (\pi/2) + n\pi} \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N-1} (-1) \frac{(-1)^n}{z - (\pi/2) - n\pi} + \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{z + (\pi/2) + n\pi} \right) \\
&= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n + 1/2)\pi}{z^2 - (n + 1/2)^2\pi^2}.
\end{aligned}
$$
∎

---

[4] $z = x + iy$ とすれば，$(e^{|y|} - 1)/2 \leq |\sin z| \leq |(e^{|y|} + 1)/2$ であることに注意．

• **(6.28) 式の証明．** $f(z)=\tan z$ とおくと，$f(0)=0$．極は，$a_n=(n+1/2)\pi, n\in\mathbb{Z}$ ですべて 1 位の極である．a_n における留数は -1 である（$\cos z=-\sin(z-(n+1/2)\pi)\sin[(n+1/2)\pi]$ に注意すれば，$\lim_{z\to n\pi}\cos z/(z-(n+1/2)\pi)=-\sin[(n+1/2)\pi]$）．定理 6.14 における積分路としては，$N\in\mathbb{N}$ として，4 個の点：$-N\pi-iN\pi$, $N\pi-N\pi i$, $N\pi+N\pi i$, $-N\pi+N\pi i$ を頂点とする長方形の周を像とする閉曲線をとればよい（向きは反時計回り）．このとき，定理 6.14 の仮定がみたされることは，例 6.8 の場合と同様にして示される．したがって

$$f(z)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z-(n+1/2)\pi}+\frac{1}{(n+1/2)\pi}\right)$$
$$=2z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1/2)^2\pi^2-z^2}.$$ ∎

6．考え方は，$(\cot z)'=-1/\sin^2 z$ に注目し，部分分数展開 (6.20) の両辺を z で微分することである．(6.20) の右辺を $g(z)$ とし，項別微分が可能であるとすれば

$$g'(z)=-\frac{1}{z^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2-(n\pi)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2z}{z^2-(n\pi)^2}\right)^2.$$

一方

$$\left(\frac{2z}{z^2-(n\pi)^2}\right)^2=\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}\right)^2$$
$$=\frac{1}{(z-n\pi)^2}+2\frac{1}{z^2-(n\pi)^2}+\frac{1}{(z+n\pi)^2}.$$

したがって

$$g'(z)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2}.$$

ゆえに証明すべき式がしたがう．

そこで，$g(z)$ に関する項別微分可能性を証明しよう．$|z|<n_0\pi$ $(n_0\in\mathbb{N})$ ならば，$n\geq 2n_0>\sqrt{2}n_0$ に対して

$$\frac{1}{|z^2-(n\pi)^2|}\leq\frac{1}{(n^2-n_0^2)\pi^2}\leq\frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n^2}.$$

$\sum_{n\geq 2n_0}1/n^2<\infty$ であるから，$h(z):=\sum_{n\geq 2n_0}1/(z^2-(n\pi)^2)$ は $|z|<n_0\pi$ で絶対一様収束する．したがって，定理 5.17 によって，$h(z)$ は $|z|<n_0\pi$ で項別微分可能である．他方

$$g(z)=\frac{1}{z}+2z\sum_{1\leq n<2n_0}\frac{1}{z^2-(n\pi)^2}+h(z)$$

と書け，右辺第 1 項と 2 項は，$z = n\pi,\ n = 0, \pm 1, \cdots, \pm(2n_0 - 1)$ を除いて微分可能である．したがって，$g(z)$ は $|z| < n_0\pi$ で，$z = n\pi,\ n = 0, \pm 1, \cdots, \pm(n_0 - 1)\pi$ を除いて項別微分可能である．n_0 は任意であったから，$g(z)$ は $\mathbb{C} \setminus \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ において項別微分可能である．

7．第 1 式は，$1/\sinh z = (-i)/\sin(-iz)$ と (6.26) 式を用いればよい．
第 2 式は，$1/\cosh z = 1/\cos(-iz)$ と (6.27) 式を用いればよい．
第 3 式は，$\tanh z = i\tan(-iz)$ と (6.28) 式を用いればよい．
第 4 式は，$\coth z = (-i)\cot(-iz)$ と (6.20) 式を用いればよい．

8．$f(z) := \cos z$ は整関数である．その零点 a_n は $a_n = (n - 1/2)\pi, n \in \mathbb{Z}$ であり，その位数は 1 である．容易にわかるように，$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 1/|a_n|^2 < \infty$．また，$f(0) = 1 \neq 0$．$f'(z)/f(z) = -\sin z/\cos z$ であるから，$\lim_{z\to\infty} f'(z)/[zf(z)] = 0$ を示すことができる．したがって，定理 6.23 が適用できるので

$$f(z) = \prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{2z}{(2n-1)\pi}\right)e^{2z/[(2n-1)\pi]}.$$

右辺の部分因子 $\prod_{n=-\infty}^{0}(\cdots)$ において $m = -n + 1$ と変数変換して整理すれば求める結果が得られる．

7章

1．(i) $a_k = (-1)^{k-1}/(ka^k)$ とおくと，$|a_k/a_{k+1}| = |a|(k+1)/k \to |a|\ (k \to \infty)$．これと定理 5.19 により，題意がしたがう．

(ii) $|z - a| < |a|$ ならば $|(z-a)/a| < 1$ であるから，第 5 章の演習問題 10-(i) により

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{z-a}{a}\right) = \mathrm{Log}\left(1 + \frac{z-a}{a}\right).$$

特に，$|z-a|/|a|$ が十分小さければ，$\left|\mathrm{Arg}\left(1 + \frac{z-a}{a}\right)\right|$ は 0 に近いので

$$-\pi < \mathrm{Arg}\, a + \mathrm{Arg}\left(1 + \frac{z-a}{a}\right) < \pi.$$

したがって

$$\begin{aligned} P_n(z, a) &= 2n\pi i + \mathrm{Log}\, a + \mathrm{Log}\left(1 + \frac{z-a}{a}\right) \\ &= 2n\pi i + \mathrm{Log}\, a\left(1 + \frac{z-a}{a}\right) = 2n\pi i + \mathrm{Log}\, z. \end{aligned}$$

ゆえに，一致の定理（系 5.25）により，題意がしたがう．

(iii) $x<0$ かつ $x \in K_a$ としよう．このとき，$|x-a|^2<|a|^2$ より，$x^2-2x\operatorname{Re}a<0$．$x<0$ であるから，$x>2\operatorname{Re}a$．ゆえに，$K_a \cap (-\infty,0) \subset (2\operatorname{Re}a,0)$．逆に，$x \in (2\operatorname{Re}a,0)$ ならば，いまの計算を逆にたどれば，$|x-a|<|a|$ が出るので，$x \in K_a \cap (-\infty,0)$．したがって，求める等式が得られる．

(iv) $c=\min\{|\operatorname{Re}a|,|\operatorname{Re}b|\}$ とおく．任意の $x \in (-c,0)$ に対して

$$\lim_{z \in K_b, \operatorname{Im} z<0, z\to x} P_{n+1}(z,b) = \lim_{z \in K_b, \operatorname{Im} z<0, z\to x} (\operatorname{Log} z + (2n+2)\pi i)$$
$$= \log|x| + (2n+1)\pi i.$$

一方，
$$\lim_{z \in K_a, \operatorname{Im} z>0, z\to x} P_n(z,a) = \log|x| + (2n+1)\pi i.$$
そこで，$D_1 := \{z \in K_a \mid \operatorname{Im} z>0, \operatorname{Re} z<0\}$, $D_2 := \{z \in K_b \mid \operatorname{Im} z<0, \operatorname{Re} z<0\}$, $\Gamma=(-c,0)$ とし，$f_1 = P_n|(D_1 \cup \Gamma)$（$P_n$ の定義域を $D_1 \cup \Gamma$ に制限したもの），$f_2 := P_{n+1}|(D_2 \cup \Gamma)$ とすれば，f_1, f_2 はパンルヴェの定理（定理 7.4）の条件をみたす．ゆえに，題意がしたがう．

2. $\mathsf{D_f}$ が開集合であることは，一般論（命題 2.3-(ii)）の応用による．$\mathsf{D_f}$ の連結性を示すために，z_1, z_2 ($z_1 \neq z_2$) を $\mathsf{D_f}$ に属する任意の点とする．したがって，$z_1 \in D_\lambda, z_2 \in D_\mu$ となる $\lambda, \mu \in \Lambda$ がある．f_λ と f_μ は互いに曲線接続の関係にあるから，z_1 と z_2 を結ぶ曲線が $\mathsf{D_f}$ 内にある．したがって，$\mathsf{D_f}$ は連結である．以上から，$\mathsf{D_f}$ は領域である．

3. (i) $r>0$ を定数とし，$|z-a|<r$ とする．このとき，$|(z-a)(z-b)| \le |z-a|(|z-a|+|a-b|) \le r(r+|a-b|)$．したがって，$r(r+|a-b|)<1 \cdots (*)$ ならば，ヴァイエルシュトラースの M 判定法により，$\sum_{n=0}^{\infty}[(z-a)(z-b)]^n$ は一様絶対収束し，$|z-a|<r$ で正則である．一方，$(*)$ をみたす $r>0$ は，$0<r<R_{a,b}$．したがって，$|z-a|<R_{a,b}$ ならば，$\sum_{n=0}^{\infty}[(z-a)(z-b)]^n$ は絶対収束し，正則である．幾何級数の公式（例 5.3）より $f_a(z)=1/[1-(z-a)(z-b)]$, $|z-a|<R_{a,b}$．

(ii) 関数 $f(z) := 1/[1-(z-a)(z-b)]$ は $(z-a)(z-b)=1$ となる点 $z_\pm := (a+b\pm\sqrt{(a-b)^2+4})/2$ を除いて，正則であり，$f(z)=f_a(z)$, $|z-a|<R_{a,b}$．したがって，f は f_a の解析接続である．$z=z_\pm$ は f の極であるから，それは特異点であり，そこには解析接続できない．よって，f が求める解析接続である．

4. (i) $\widehat{f}(k) = \int_{-R}^{R} e^{-ikx} f(x)dx$（$\because$ $|x| \ge R$ ならば $f(x)=0$）と，任意の $k,t,x \in \mathbb{R}$ に対して，$|e^{-i(k+t)x}-e^{-ikx}| = |e^{-itx}-1| \le |t||x|$ を用いると

$$|\widehat{f}(k+t)-\widehat{f}(k)| \le |t| \int_{-R}^{R} |x||f(x)|dx \to 0 \quad (t \to 0).$$

したがって，$\widehat{f}$ は連続である．

(ii) $|\widehat{f}(k)| \le \int_{-R}^{R} |f(x)|dx = M.$

(iii) $z = k + ip \in \mathbb{C}$ $(k, p \in \mathbb{R})$ に対して，$|e^{-izx}f(x)| = e^{px}|f(x)|$ であり，これは，$[-R, R]$ 上でリーマン積分可能である．したがって，積分

$$F(z) := \int_{-R}^{R} e^{-izx}f(x)dx$$

が定義される．$g(x, z) = e^{-izx}f(x)$ とおくと，これは，z について整関数であり，$\partial g(x, z)/\partial z = -ixe^{-izx}f(x)$．したがって，$L > 0$ を任意の定数として，$|z| \le L$ に対して，

$$\left|\frac{\partial g(x, z)}{\partial z}\right| = |x|e^{px}|f(x)| \le |x|e^{L|x|}|f(x)|.$$

右辺は，$[-R, R]$ 上で積分可能である．また，$|g(x, z)| \le e^{L|x|}|f(x)|$．ゆえに，定理 4.39 によって，$F$ は，$|z| < L$ で微分可能であり，$F'(z) = -i\int_{-R}^{R} xe^{-izx}f(x)dx$．$L > 0$ は任意であったから，$F(z)$ は整関数である．よって，容易にわかるように，$\lim_{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}, z\to k} F(z) = \widehat{f}(k)$, $x \in \mathbb{R}$．したがって，F は $\widehat{f}$ の解析接続である．

5. (i)
$$\begin{aligned} |\tilde{f}(k+t) - \tilde{f}(k)| &\le \int_0^\infty |e^{-itx} - 1||f(x)|dx \\ &\le |t|\int_0^\infty |x||f(x)|dx \to 0 \quad (t \to 0). \end{aligned}$$
したがって，$\tilde{f}$ は連続．

(ii) $|\tilde{f}(k)| \le M_f$, $k \in \mathbb{R}$ であるから，題意がしたがう．

(iii) 任意の $z = k - ip$ $(k \in \mathbb{R}, p > 0)$ に対して，$|e^{-izx}f(x)| = e^{-px}|f(x)| \le |f(x)|$, $x > 0$ であるから，関数

$$G(z) := \int_0^\infty e^{-izx}f(x)dx, \quad \operatorname{Im} z < 0$$

が定義される．$h(x, z) := e^{-izx}f(x)$ とおくと，これは z の整関数であり

$$|h(x, z)| \le |f(x)|, \quad x > 0, \operatorname{Im} z < 0$$

かつ

$$|\partial h(x, z)/\partial z| \le |x||f(x)|, \quad x > 0, \operatorname{Im} z < 0.$$

ゆえに，定理 4.39 によって，G は，Π_- で微分可能であり

$$G'(z) = -i\int_0^\infty xe^{-izx}f(x)dx.$$

よって，G は Π_- で正則である．容易にわかるように，$\lim_{z\in\Pi_-, z\to x} G(z) = \tilde{f}(x), x \in \mathbb{R}$．したがって，$G$ は $\tilde{f}$ の解析接続である．

8章

1. $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$, $\mathrm{Re}\, z > 0$ において，$t = -\log s = \log(1/s)$ $(0 < s < 1)$ と変数変換を行えばよい．

2. $\Gamma_1(z) = G_1(z) + \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ と分ける．ただし，$G_1(t) := \int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt$. $e^{-t}t^{z-1} = \sum_{n=0}^\infty \dfrac{(-1)^n t^{n+z-1}}{n!}$ であり，$\mathrm{Re}\, z > 1$ かつ $0 \leq t \leq 1$ ならば $\left|\dfrac{(-1)^n t^{n+z-1}}{n!}\right| \leq \dfrac{1}{n!}$ であるので，この級数の収束は，$t \in [0,1]$ および z $(\mathrm{Re}\, z > 1)$ に関して一様である．したがって

$$G_1(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{n+z-1}dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}.$$

ゆえに，$\mathrm{Re}\, z > 1$ に対して，式 (ML) が得られる．

$$F(z) := \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

とすれば，これは，$\mathbb{C} \setminus \{-n \mid n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ で正則な関数であるから，$\mathrm{Re}\, z > 1$ での結果と一致の定理（系 5.25）により，すべての $z \in \mathbb{C} \setminus \{-n \mid n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ に対して，$\Gamma(z) = F(z)$ がしたがう．

3. $t = x^4$, $x \geq 0$ と変数変換すると，$dt = 4x^3dx$, $x = t^{1/4}$ であるので

$$\int_0^\infty e^{-x^4}dx = \frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-t}t^{-3/4}dt = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{4}+1\right) = \left(\frac{1}{4}\right)!.$$

4. $t = x^p$, $x \geq 0$ と変数変換すると，$dt = px^{p-1}dx$, $x = t^{1/p}$ であるので

$$\int_0^\infty e^{-x^p}dx = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-t}t^{(1-p)/p}dt = \frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right) = \left(\frac{1}{p}\right)!.$$

5. $\dfrac{(az-1)!}{(bz-1)!} = \dfrac{\Gamma(az)}{\Gamma(bz)} = \dfrac{b}{a}\cdot(az)\Gamma(az)\cdot\dfrac{1}{(bz)\Gamma(bz)}$. そこで，$\lim_{z\to 0} z\Gamma(z) = 1$ を使えばよい．

6. $I := -\int_0^\infty e^{-t}(\log t)\,dt$ とおく．$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$, $\mathrm{Re}\, z > 0$ より，$\Gamma'(z) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot(\log t)\ t^{z-1}dt$. したがって，$I = -\Gamma'(1)$. 他方，定理 8.3 より（$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ も使う），任意の $x > -1$ に対して

$$-\log\Gamma(x+1) = \gamma x + \sum_{n=1}^\infty \left[\log\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right].$$

両辺を x で微分すれば

$$-\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \gamma - x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\left(1+\frac{x}{n}\right)}.$$

そこで，$x=0$ とすれば，$-\Gamma'(1)=\gamma$．ゆえに，$I=\gamma$．

7. $S_r(\alpha)=4\int_0^r(r^\alpha-x^\alpha)^{1/\alpha}dx$．$x=rt$ と変数変換すると $S_r(\alpha)=4r^2\int_0^1(1-t^\alpha)^{1/\alpha}dt$．そこで，$y=t^\alpha$ と変数変換すれば，

$$\begin{aligned}S_r(\alpha) &= \frac{4r^2}{\alpha}\int_0^1(1-y)^{1/\alpha}y^{(1/\alpha)-1}dy = \frac{4r^2}{\alpha}B(1/\alpha,(1+\alpha)/\alpha)\\ &= \frac{4r^2}{\alpha}\frac{\Gamma(1/\alpha)\Gamma(1+(1/\alpha))}{\Gamma(1+(2/\alpha))} = \frac{4r^2}{\alpha}\frac{1}{\alpha}\frac{\Gamma(1/\alpha)^2}{(2/\alpha)\Gamma(2/\alpha)}\\ &= \frac{2r^2}{\alpha}\cdot\frac{\Gamma(1/\alpha)^2}{\Gamma(2/\alpha)}.\end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned}\frac{x^s}{e^x+1} &= \frac{x^s}{e^x-1}\cdot\frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{x^s}{e^x-1}\cdot\left(1-\frac{2}{e^x+1}\right)\\ &= \frac{x^s}{e^x-1} - 2\frac{x^s}{e^{2x}-1}.\end{aligned}$$

これと (8.45) を用いると

$$\int_0^\infty\frac{x^s}{e^x+1}dx = \Gamma(s+1)\zeta(s+1) - 2\int_0^\infty\frac{x^s}{e^{2x}-1}dx.$$

$t=2x$ という変数変換をすれば，

$$2\int_0^\infty\frac{x^s}{e^{2x}-1}dx = 2^{-s}\int_0^\infty\frac{t^s}{e^t-1}dt = 2^{-s}\Gamma(s+1)\zeta(s+1).$$

したがって，示すべき式が導かれる．

9章

1. (i) 与えられた微分方程式は $X''(t)+2\mu X'(t)+\omega^2X(t)=0\cdots(*)$ と書ける．2 次方程式の根と係数の関係から，$\alpha+\beta=-2\mu, \alpha\beta=\omega^2$．これと $(*)$ を用いると

$$\begin{aligned}Y'(t) &= X''(t)-\beta X'(t) = -2\mu X'(t)-\omega^2X(t)-\beta X'(t)\\ &= \alpha X'(t)-\alpha\beta X(t) = \alpha Y(t).\end{aligned}$$

(ii) 9.1.1 項と同様にして，$Y(t)=e^{\alpha t}Y(0)$．$Y(0)=X'(0)-\beta X(0)=v_0-\beta x_0=y_0$ であるから，求める結果を得る．

(iii) (ii) と (i) により $X'(t) - \beta X(t) = y_0 e^{\alpha t}$．そこで，$Z(t) := e^{-\beta t} X(t)$ とおけば，$Z'(t) = y_0 e^{(\alpha-\beta)t}$．これを積分するために 2 つの場合に分ける．

(A) $\alpha \neq \beta$ の場合．このとき，$Z(t) = x_0 + y_0(e^{(\alpha-\beta)t} - 1)/(\alpha - \beta)$ ($Z(0) = x_0$ に注意)．したがって，$X(t) = e^{\beta t}[x_0 + y_0(e^{(\alpha-\beta)t} - 1)/(\alpha - \beta)]$．これを整理すれば，求める式が得られる．

(B) $\alpha = \beta$ の場合．このときは，$Z(t) = y_0 t + x_0$．したがって，$X(t) = e^{\beta t}(y_0 t + x_0)$．

2. (i) $Z'(t) = X'(t) + iY'(t)$ に与式を代入すればよい．

(ii) 問題 1-(ii) と同様．

(iii)
$$X(t) = \mathrm{Re}\,[(X(0) + iY(0))e^{(a-ib)t}],$$
$$Y(t) = \mathrm{Im}\,[(X(0) + iY(0))e^{(a-ib)t}]$$
を計算すればよい．

3. (1) $z = re^{i\theta}$ $(r > 0, \theta \in (-\pi, \pi))$ とすれば，$f(z) = r^{1/2} e^{i\theta/2}$．したがって，流線の方程式は，$k$ を実数として $r^{1/2} \sin(\theta/2) = k$．3 つの場合分けが必要である．

(i) $k = 0$ の場合．このときは，$\sin(\theta/2) = 0$ であるから，$\theta = 0$．すなわち，流線の像は，正の実軸である．

(ii) $k > 0$ の場合．このときは，$\sin(\theta/2) > 0$ であるから，$0 < \theta < \pi$ であり，$r \sin^2(\theta/2) = k^2$．これは，$r = 2k^2/(1 - \cos\theta)$ と同値である．これは放物線 $x = -k^2 + y^2/(4k^2)$ の $y > 0$ の部分を表す．

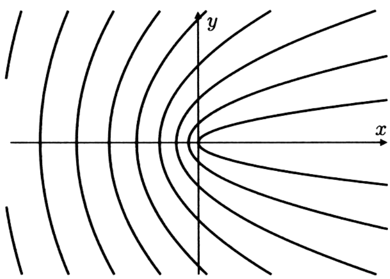


図 5　$f(z) = z^{1/2}$ の流線群
($(-\infty, 0]$ は除く)

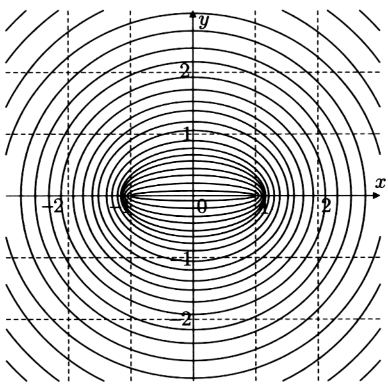


図 6　$f(z) = \cos^{-1} z$ の流線群

(iii) $k<0$ の場合．このときは，$\sin(\theta/2)<0$ であるから，$-\pi<\theta<0$ であり，(ii) の場合と同様に，$r=2k^2/(1-\cos\theta)$．これは放物線 $x=-k^2+y^2/(4k^2)$ の $y<0$ の部分を表す．

(2) k を実数として，$\cos^{-1}z=u+ik$ とおくと，$\cos(u+ik)=z$ であるから，$(e^{iu}e^{-k}+e^{-iu}e^{k})/2=x+iy$．したがって，$x=(\cosh k)\cos u$, $y=-(\sinh k)\sin u$．したがって，$k\neq 0$ のとき，$(x/\cosh k)^2+(y/\sinh k)^2=1$．これは楕円の方程式である．$k=0$ のときは，$y=0$, $x=\cos u$ であるので，これは，線分 $[-1,1]$ を表す．

4. $a=\sqrt{2mB}/k$ とおくと, $e^{2i\delta}=(ia+1)/(ia-1)$．右辺は $(a^2-2ia-1)/(a^2+1)$ に等しい．したがって $\cos 2\delta=(a^2-1)/(a^2+1)$, $\sin 2\delta=-2a/(a^2+1)$．一方, $\cos 2\delta=1-2\sin^2\delta$ であるから，第 1 式から，$\sin^2\delta=1/(a^2+1)\cdots(*)$ が得られる．また, $\sin 2\delta=2\sin\delta\cos\delta$ と第 2 式により, $\sin\delta\cos\delta=-a/(a^2+1)\cdots(**)$. したがって，$(**)$ と $(*)$ の比をとれば，$\cot(-\delta)=a$．ゆえに，$-\delta=\cot^{-1}a$.

索　引

著者紹介

新（あら） 井（い） 朝（あさ） 雄（お）

1976年　千葉大学理学部物理学科卒業
1979年　東京大学大学院理学研究科修士課程修了
現　在　北海道大学大学院理学研究院数学部門 教授，理学博士
研究分野　数理物理学，数学，数理芸術学，哲学
主要著書　『対称性の数理』（日本評論社）
『ヒルベルト空間と量子力学』（共立出版）
『フォック空間と量子場（上・下）』（日本評論社）
『多体系と量子場』（岩波書店）
『物理現象の数学的諸原理』（共立出版）
『現代物理数学ハンドブック』（朝倉書店）
『現代ベクトル解析の原理と応用』（共立出版）
『量子現象の数理』（朝倉書店）
『場の量子論と統計力学』（共著，日本評論社）
『量子力学の数学的構造（Ⅰ・Ⅱ）』（共著，朝倉書店）

複素解析とその応用
Complex Analysis and its Applications

2006年12月25日　初版1刷発行

著　者　新井朝雄　©2006

発行者　南條光章

発行所　**共立出版株式会社**
東京都文京区小日向 4-6-19
電話　東京 (03)3947-2511 番（代表）
郵便番号 112-8700
振替口座 00110-2-57035
URL http://www.kyoritsu-pub.co.jp/

印　刷　加藤文明社

製　本　関山製本

検印廃止
NDC 413.52, 421.5
ISBN 4-320-01830-3

社団法人
自然科学書協会
会員
Printed in Japan